CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

Unioeste – *Campus* de Cascavel

ANA ALICE DE SOUZA

GIULIA TOCHETTO CASTAGNETI

JÚLIA MARIA MATTOS BARBIEIRO

MILENA MACIEL ROMÃO

STEPHANY AMANDA PARTEKA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL

2023

ANA ALICE DE SOUZA
GIULIA TOCHETTO CASTAGNETI
JÚLIA MARIA MATTOS BARBIERO
MILENA MACIEL ROMÃO
STEPHANY AMANDA PARTEKA

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Jesus Marcos Camargo.

CASCAVEL

2023

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sólidos em acrílico e construções dos alunos 16
Figura 2 – Construções dos alunos 17
Figura 3 – Pesquisa eleitoral 23
Figura 4 – Pesquisa eleitoral alterada 24
Figura 5 – Cadeiras 24
Figura 6 – Polímero PET 26
Figura 7 – Marcador de combustível 26
Figura 8 – Lucro 46
Figura 9 – Combustível no tanque 47
Figura 10 – Litro 48
Figura 11 – Metro cúbico 48
Figura 12 – Função 7x 50
Figura 13 – Função x-9 51
Figura 14 – Função -11x+2 51
Figura 15 – Função 2x+3 52
Figura 16 – Função 4x+3/2 52
Figura 17 – Função -8x/7-3 53
Figura 18 – Função -4x+3/2 53
Figura 19 – Lucro dos eletrônicos 65
Figura 20 – Copo de água 66
Figura 21 –Tabela 67
Figura 22 – Volume em função do tempo 67
Figura 23 – Reservatórios 68
Figura 24 – Preço do produto 68
Figura 25 – Imposto pelo preço 69
Figura 26 – Arrecadação 69
Figura 27 – Arrecadação por desconto 70
Figura 28 – População brasileira 70
Figura 29 – Imposto resolução 74
Figura 30 – Quantidade da substância 85
Figura 31 – Parábola 86
Figura 32 – Esboço do gráfico 87
Figura 33 – Gráfico da quadrática 87

Figura 34 – Parábola 88
Figura 35 – Pães 97
Figura 36 – Taxa de desemprego 98
Figura 37 – Elevador 98
Figura 38 – Frequência do dado 99
Figura 39 – Idade 100
Figura 40 – Roleta de desconto 101
Figura 41 – Soma de dados 106
Figura 42 – Tangram 112
Figura 43 – Triângulos com Tangram 112
Figura 44 – Quadrados com Tangram 112
Figura 45 – Área 113
Figura 46 – Combustível 115
Figura 47 – Área do quarto 116
Figura 48 – Hexágono 117
Figura 49 – Casos confirmados 118
Figura 50 – Gripe suína 119
Figura 51 – Resolução área 120
Figura 52 – Tetraedro 131
Figura 53 – Cubo 131
Figura 54 – Pirâmide 132
Figura 55 – Octaedro 132
Figura 56 – Troféu 133
Figura 57 – Laje 134
Figura 58 – Reservatórios cilíndricos 134
Figura 59 – Silos 136
Figura 60 – Caixa de madeira 137
Figura 61 – Quadrado 144
Figura 62 – Demonstração de Pitágoras 144
Figura 63 – Demonstração 145
Figura 64 – Altura do edifício 146
Figura 65 – Tabuleiro pitagórico 148
Figura 66 – Fichas do tabuleiro 148
Figura 67 – Fichas para tabuleiro 149
Figura 68 – Fichas do jogo 149

Figura 69 – Fichas Pitágoras 150
Figura 70 – Lâminas 150
Figura 71 – Lâminas 151
Figura 72 – Trigonometria resolução 152
Figura 73 – Propagandas 158
Figura 74 – Início 167
Figura 75 – Movimento 1 167
Figura 76 – Movimento 2 168
Figura 77 – Movimento 3 168
Figura 78 – Movimento 4 168
Figura 79 – Movimento 5 169
Figura 80 – Movimento 6 169
Figura 81 – Movimento 7 169
Figura 82 – Sombras 171
Figura 83 – Estrela 26 173
Figura 84 – Estimando 174
Figura 85 – Resolução do Tangram 183
Figura 86 – Solução das sombras do Tangram 183
Figura 87 – Resolução estrela 26 184

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Modelo de tabela apresentada aos alunos 16
Quadro 2 – Cronograma 19
Quadro 3 – Fichas do varal 22
Quadro 4 – Fichas 42
Quadro 5 – Fichas do jogo 43
Quadro 6 – Fichas do jogo da memória 43
Quadro 7 – Função -6x+3 44
Quadro 8 – Função x-9 44
Quadro 9 – Função 7x 44
Quadro 10 – Função x^3+16 44
Quadro 11 – Função -8x/7-3 45
Quadro 12 – Função 8+2x 45
Quadro 13 – Função -4x+3/2 45
Quadro 14 – Atividade dos palitos 64
Quadro 15 – Atividade dos palitos 71
Quadro 16 – Cartelas 80
Quadro 17 – Cartelas stop 81
Quadro 18 – Cartelas do stop 82
Quadro 19 – Cartelas stop das funções 84
Quadro 20 – Tabuleiro corrida de cavalos 95
Quadro 21 – Gols por partida 96
Quadro 22 – Vacinas 98
Quadro 23 – Relação de Euler 132
Quadro 24 – Relação de Euler 138
Quadro 25 – Situação-problema 160
Quadro 26 – Despesas mensais 161
Quadro 27 – Sudoku 173
Quadro 28 – Resolução Sudoku 184

Sumário

1. **Introdução** 10
2. **Promat 2022** 11
3. **Artigo** 12
4. **Cronograma** 19
5. **Encontro 1:** 20
   - 5.1 **Plano de aula** 20
   - 5.2 **Material entregue aos alunos** 23
   - 5.3 **Resolução dos exercícios** 31
   - 5.4 **Relatório** 36
6. **Encontro 2:** 39
   - 6.1 **Plano de aula** 39
   - 6.2 **Material entregue aos alunos** 44
   - 6.3 **Resolução dos exercícios** 50
   - 6.4 **Relatório** 59
7. **Encontro 3** 61
   - 7.1 **Plano de aula** 61
   - 7.2 **Material entregue aos alunos** 64
   - 7.3 **Resolução dos exercícios** 71
   - 7.4 **Relatório** 75
8. **Encontro 4** 77
   - 8.1 **Plano de aula** 77
   - 8.2 **Material entregue aos alunos** 85
   - 8.3 **Resolução dos exercícios** 86
   - 8.4 **Relatório** 91
9. **Encontro 5** 93

9.1 **Plano de aula** ... 93
9.2 **Material entregue aos alunos** ... 96
9.3 **Resolução dos exercícios** ... 103
9.4 **Relatório** ... 107
10. **Encontro 6** ... 109
10.1 **Plano de aula** ... 109
10.2 **Material entregue aos alunos** ... 113
10.3 **Resolução dos exercícios** ... 120
10.4 **Relatório** ... 127
11. **Encontro 7** ... 128
11.1 **Plano de aula** ... 128
11.2 **Material entregue aos alunos** ... 132
11.3 **Resolução dos exercícios** ... 138
11.4 **Relatório** ... 141
12. **Encontro 8** ... 142
12.1 **Plano de aula** ... 142
12.2 **Material entregue aos alunos** ... 151
12.3 **Resolução dos exercícios** ... 151
12.4 **Relatório** ... 153
13. **Encontro 9** ... 155
13.1 **Plano de aula** ... 155
13.2 **Material entregue aos alunos** ... 158
13.3 **Resolução dos exercícios** ... 161
13.4 **Relatório** ... 163
14. **Encontro 10** ... 165
14.1 **Plano de aula** ... 165

14.2 **Material entregue aos alunos** 177

14.3 **Resolução dos exercícios** 177

14.4 **Relatório** 186

15. **Considerações finais** 188

1. **Introdução**

O presente trabalho descreve as atividades realizadas na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I, no projeto de ensino e extensão Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área de Matemática, realizado no primeiro semestre do ano letivo de 2022 pelo terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste.

O Promat se trata de um curso preparatório de Matemática, tendo como público-alvo alunos do ensino médio da rede pública de ensino que tenham interesse em realizar a prova do Enem – Exame Nacional do Ensino Médio – e demais vestibulares para ingressar no Ensino Superior.

Inicialmente, devido ao encurtamento do calendário acadêmico de 2022 pela Covid-19, o projeto possuía apenas cinco encontros com foco total no Enem. Entretanto, para cumprir com a carga horária do estágio e pela divulgação do vestibular da Unioeste para fevereiro de 2023, foi estendido por mais cinco encontros. Totalizando dez encontros. O projeto teve início no dia oito de outubro de 2022 e se estendeu até o dia dez de dezembro de 2022.

Este trabalho é composto por uma breve descrição acerca do projeto, seguido do artigo intitulado “O uso de jujubas e palitos como estratégia de ensino no estudo da geometria espacial’’ que discorre sobre uma proposta de atividade lúdica e manipulativa para o ensino da geometria espacial. Na sequência, apresenta-se o cronograma, planejamento e relatórios referentes aos dez encontros. Por fim, são feitas as considerações finais.

Para o planejamento das aulas, foram utilizadas a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas como metodologias de ensino, priorizando o uso de materiais lúdicos e jogos na sala de aula. O objetivo foi desenvolver um trabalho diferente do que os alunos estão acostumados nas escolas, tornando a aula mais dinâmica e interessante. Para isso, foram realizadas várias atividades em grupos, a fim de que os alunos pudessem interagir entre si e compartilhar seus conhecimentos. Também utilizamos eslaides, *softwares* e experimentos fora da sala de aula como ferramentas de ensino.

2. **Promat 2022**

O Promat é um projeto na forma curso preparatório gratuito oferecido pela Universidade Estadual do Paraná e desenvolvido pelo Colegiado do Curso de Licenciatura plena em Matemática do *campus* de Cascavel. Este curso é direcionado aos alunos da rede pública que buscam ingressar no Ensino Superior. Por isso, são trabalhados os conteúdos do Ensino Médio que estão presentes no Enem e em outros vestibulares. Quando há vagas disponíveis, também são ofertadas para qualquer pessoa que esteja interessada em aprender Matemática, inclusive acadêmicos.

O Programa é dividido em duas partes. A primeira parte é ministrada por alunos licenciandos do 3° ano do curso de Matemática, matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado I. Essa turma realiza o projeto no primeiro semestre do ano letivo. Já na segunda parte, são os alunos licenciandos do 4° ano do curso de Matemática, matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II que executam o projeto no segundo semestre letivo.

O Promat ocorre nas dependências da Unioeste e tem duração de dez encontros. Os encontros acontecem aos sábados no período da manhã, das 8:00 às 11:40. Também há um intervalo de vinte minutos para o lanche. Ao final do curso, os alunos com frequência maior ou igual a 70% recebem um certificado de participação.

Essas aulas são planejadas de modo a buscar romper com a cultura da memorização e do paradigma do exercício das escolas tradicionais. Logo, prioriza-se o uso de jogos, dinâmicas e atividades diferenciadas no ambiente de ensino. Ademais, as tecnologias são ferramentais poderosas para facilitar a aprendizagem.

3. **Artigo**

O USO DE JUJUBAS E PALITOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO NO ESTUDO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Ana Alice de Souza

Giulia Tochetto Castagneti

Júlia Maria Mattos Barbiero

Milena Maciel Romão

Stephany Amanda Parteka

Resumo: Neste trabalho é apresentada uma alternativa lúdica para o ensino de poliedros. São abordados os entraves que envolvem trabalhar a geometria espacial em sala de aula e a importância do uso de atividades manipulativas no processo de ensino-aprendizagem. Por fim, é relatada a experiência observada na aplicação da proposta durante uma das aulas do Promat.

Palavras chave: Geometria espacial; poliedros; jujubas; palitos.

Abstract: This work presents a playful alternative for teaching polyhedrons. Barriers involving working on spatial geometry in the class and the importance of using manipulative activities in the teaching-learning process are discussed. Finally, the experience observed in the application of the proposal during one the Promat classes is reported.

Keywords: Spatial geometry; polyhedron; gummy candy; toothpicks.

Introdução

A palavra Geometria vem do grego *Geometrein*, dos radicais *"geo" que* significa terra e "*metrein" que* significa medir. Essa construção remonta às origens da ciência, essencialmente utilizada para medir a terra. De acordo com Eves (1997), as primeiras considerações feitas a respeito da geometria são muito antigas, tendo como base a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. Assim teve início uma área de estudo que surgiu das necessidades da sociedade, quando o homem precisou resolver problemas como construções de casas e delimitação de terrenos e plantações.

Atualmente, com a globalização e o desenvolvimento da pesquisa, a geometria passou a contar com uma linha de estudo maior. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática para o Ensino Médio (2006)

> O estudo da geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. (BRASIL, 2006, p. 75)

A geometria espacial é uma subárea da geometria responsável pelo estudo das figuras conhecidas como sólidos geométricos, devido à sua característica de tridimensionalidade (altura, largura e comprimento). Prismas, cones e pirâmides são, por exemplo, alguns sólidos explorados por essa subárea.

É indispensável para a boa formação do aluno em tempo escolar que ele domine os conceitos da geometria espacial. Entretanto, de acordo com Rogenski e Pedroso (2009, p. 5) os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente, com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, consequentemente, da geometria espacial. Ademais, não estabelecem relação entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos.

Por este motivo, observamos a necessidade de abordar uma proposta alternativa ao tradicional ensino quadro-giz. Dessa maneira, apresentamos nesse artigo uma das possibilidades práticas de se trabalhar com sólidos geométricos e suas propriedades.

A geometria espacial de forma lúdica

A geometria tem extrema importância no cotidiano das pessoas, pois desenvolve o raciocínio visual, trazendo para o indivíduo noções de espaço, profundidade e propriedades das formas geométricas. Gutiérrez (1992) afirma que ao trabalhar a geometria espacial é fundamental ter em mente a visualização. Uma pessoa que tem dificuldade em visualizar terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e em expressar suas próprias ideias.

Apesar de a geometria espacial estar presente em tudo ao nosso redor, demasiadas vezes os alunos encontram dificuldades para a visualização e compreensão de seus aspectos. Segundo Becker (2009), é muito comum ouvir um aluno identificar um tetraedro como um triângulo ou até mesmo um octaedro como um losango. Isto é, não diferenciam modelos do plano e do espaço. Obter uma percepção geométrica requer esforço e criatividade. Kachak (2016) afirma que

> Um dos fatores que influência nas dificuldades de aprendizagem é o mito de que a matemática é uma disciplina abstrata e de difícil entendimento, ao utilizar jogos na construção de conceitos matemáticos os alunos começam a mudar essa visão em relação à matemática se sentindo capazes de compreender os conteúdos estudados. (KACHAK, 2016, p.4)

Nesse sentido, torna-se fundamental tirar do papel o que é abstrato, trazendo para algo palpável. Isso mostra a necessidade de reinventar o ensino da geometria espacial no âmbito da educação.

Destarte, o uso de materiais manipulativos para ensinar de forma lúdica é uma das alternativas que contribuem para que o aluno tenha êxito nesse processo. Andrade, et al. (2016) afirmam que “O uso de atividades práticas tem maior sucesso quando comparado aos métodos tradicionais de ensino, pois possibilita que os alunos façam da aprendizagem um processo interessante e divertido”.

O uso de jujubas e palitos para a construção de poliedros foi o método lúdico escolhido para ser aplicado em nossa aula. A partir dessa atividade possibilitamos, de forma prática, o manuseio e o reconhecimento dos sólidos estudados. Auxiliando na construção de relações, identificação e visualização. Também é uma possibilidade de abordar a relação de Euler por meio da Investigação Matemática. Ademais, é uma proposta de fácil implementação.

Deste modo, acreditamos que com o auxílio do professor para as instruções e orientações necessárias, as construções são um excelente recurso para trabalhar a matemática significativa.

Uma experiência no Promat

Movidas pela dificuldade experienciadas enquanto alunas, ante a necessidade de ensinar tal conteúdo, buscamos realizar uma aula diferente. Através de pesquisas, optamos por construir os sólidos em aula utilizando jujubas e palitos. Isso porque, são materiais acessíveis e de baixo custo.

A princípio, utilizaríamos apenas esses objetos de manipulação. Porém, conversando com outros professores e estagiários, decidimos também utilizar sólidos geométricos em acrílico para auxiliar na visualização. Os protótipos foram cedidos pelo Laboratório de Ensino da Matemática (LEM) da Unioeste.

A atividade foi aplicada no dia 19 de novembro de 2022 e ocorreu da seguinte forma:

- Os alunos foram divididos em grupos (duplas e trios);
- Entregamos os sólidos em acrílico e os deixamos circulando entre os grupos;
- Realizamos as primeiras indagações aos estudantes, a fim de que classificassem os sólidos em: regular ou irregular; convexo ou côncavo; poliedro ou corpo redondo;
- Com a participação da turma explicamos os conceitos e classificamos os sólidos;
- Entregamos oito jujubas e doze palitos para cada aluno;
- Explicamos que as jujubas representariam os vértices e os palitos as restas de cada figura;
- Solicitamos que realizassem a construção de cinco poliedros: tetraedro regular, hexaedro regular (cubo), pirâmide regular de base quadrada, prisma regular de base triangular e octaedro regular;
- Instruímos que montassem uma tabela e registrassem o número de faces, vértices e arestas de cada sólido produzido.

Quadro 1 – Modelo de tabela apresentada aos alunos

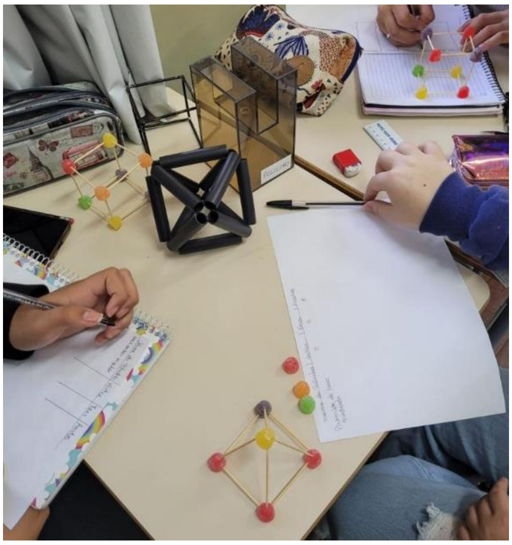
Nome do Poliedro	Vértices (jujubas)	Faces	Arestas (palitos)

Fonte: Elaborado pelas autoras

A primeira dificuldade apresentada foi para identificar os sólidos, sobretudo o tetraedro regular e o octaedro regular. Como deviam ser construídos, antes de qualquer coisa o aluno precisava conhecer o sólido para, depois, tentar montá-lo.

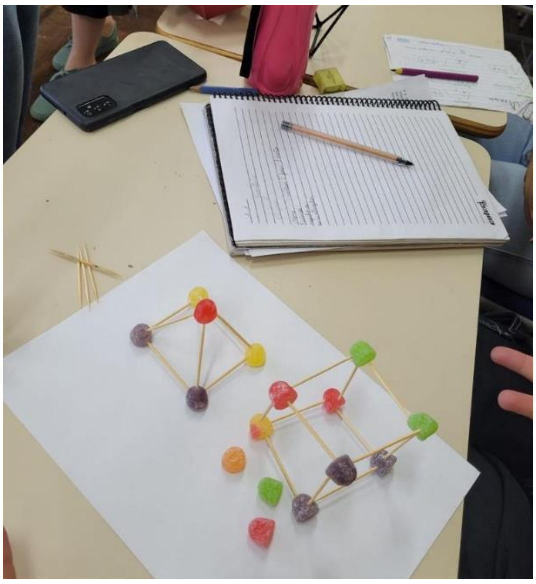
Depois de identificados, os alunos iniciaram as construções e registros. Nesse momento, foi muito interessante perceber a interação entre os integrantes dos grupos, um ajudando o outro. Também notamos como a exposição dos sólidos contribuiu positivamente para as construções, uma vez que a maioria dos alunos se baseou na visualização para conseguir projetar.

Figura 1 – Sólidos em acrílico e construções dos alunos



Fonte: Arquivo das autoras

Figura 2 – Construções dos alunos



Fonte: Arquivo das autoras

Todos os estudantes realizaram as cinco construções e registraram os dados em uma tabela. Nesse momento, pedimos que procurassem estabelecer uma relação entre o número de faces, vértice e arestas de cada sólido realizado. Alguns alunos conseguiram chegar à relação de Euler $V + F = A + 2$, porém, a maior parte da sala precisou de dicas e de um maior tempo para associar os valores. Logo, é um tema que pode ser reforçado em mais aulas e com outras atividades.

Percebemos que os alunos estavam empenhados em realizar a sua própria construção, mesmo que o colega já tivesse concluído. Além disso, ficaram muito animados para comer as jujubas. Entretanto, respeitaram o combinado até o final da aula.

Considerações finais

Ao longo do trabalho, percebemos e observamos na prática a necessidade de priorizar o uso de recursos lúdicos e manipulativos que despertem o interesse e coloquem o aluno como ser ativo no processo da aprendizagem. Embora não exista uma receita para ensinar, fica claro o papel do professor em procurar estratégias e recursos didáticos que diversifiquem sua prática pedagógica. Dessa forma, acreditamos que a aplicação da dinâmica apresentada foi um sucesso e certamente iremos repeti-la em outros momentos da caminhada docente.

Referências

ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas e palitos de dente: um método lúdico para ensinar Geometria Espacial**. Monografia. 43 p. Duque de Caxias, RJ. Unigranrio, 2010.

ANDRADE, Fabiana; LEÃO, Leide Mª; OLIVEIRA, Geovane André Teles; PINTO, Valessa Leal Lessa de Sá. **JUJUBAS: UM RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE POLIEDROS**. p. 1-12, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília, 2006.

CONHEÇA a história da evolução da geometria e de seus estudiosos, **Globo Ciência**, 2011. Disponível em: http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/conheca-historia-da-evolucao-da-geometria-e-de-seus-estudiosos.html. Acesso em: 13 fev. 2023.

KACHAK, Sidenea do Rocio; RIBAS, João Luiz Domingues. **As contribuições do Tangram para a Geometria Plana**. p. 1-21, 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_uepg_sideneadorociokachak.pdf. Acesso em: 13 fev. 2023.

NASCIMENTO, Janio Benevides De Souza**. O estudo da geometria espacial por meio da construção de sólidos com materiais alternativos**. 2014. Dissertação de Mestrado. PPGECE; Ensino de Ciências Exatas.

SETTIMY, Thaís Fernanda; BAIRRAL, Marcelo. **DIFICULDADES ENVOLVENDO A VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA ESPACIAL**. p. 177-195, 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/343556166_DIFICULDADES_ENVOLVENDO_A_VISUALIZACAO_EM_GEOMETRIA_ESPACIAL. Acesso em: 13 fev. 2023.

4. **Cronograma**

Quadro 2 – Cronograma

Encontro	Data	Conteúdos
1	08/10	Fração; divisão de decimais; razão e proporção; radicais e racionalização.
2	15/10	Equações; sistema de equações; função afim.
3	22/10	Funções e interpretação de gráficos.
4	29/10	Função quadrática.
5	05/11	Estatística e probabilidade.
6	12/11	Geometria plana.
7	19/11	Geometria espacial.
8	26/11	Trigonometria.
9	03/12	Matemática financeira.
10	10/12	Gincanas e confraternização.

Fonte: Elaborado pelas autoras

5. Encontro 1:
5.1 Plano de aula

Plano de aula – primeiro encontro – 08/10/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Fração; divisão de decimais; razão e proporção; radicais e racionalização.

Objetivo geral: Compreender os conceitos e aplicá-los na resolução de questões do Enem.

Objetivos específicos:

- Comparar, ordenar e localizar diferentes representações numéricas na reta real;
- Identificar frações próprias, impróprias e aparentes;
- Reconhecer que um mesmo número pode ser expresso de diferentes formas;
- Estabelecer relações entre grandezas;
- Utilizar propriedades da radiciação;
- Desenvolver estratégias para cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Varal, fichas, prendedor, lousa e giz.

Encaminhamento metodológico:

O encontro será iniciado com a seguinte dinâmica de apresentação: os alunos serão divididos em duplas e terão alguns minutos para interagir entre si. Ao final desse tempo, será solicitado que cada integrante da dupla apresente seu colega, descrevendo o máximo de características que conseguir lembrar.

Em seguida, será colocado um varal como representação da reta real. As acadêmicas introduzirão a dinâmica posicionando as três primeiras fichas (0, 1 e –2), de modo que cada ficha indica um número. Na sequência, cada estudante receberá uma ficha aleatória, para que pense no posicionamento correto dela na reta. Deverão então, um por vez, fixar suas fichas no varal. Posteriormente, a reta será corrigida e a dinâmica finalizada.

Depois, as estagiárias retomarão, no quadro, a divisão de decimais e apresentarão as definições e propriedades de frações próprias, impróprias e aparentes. E então, será entregue aos alunos a lista de exercícios 1, referente aos primeiros conteúdos trabalhados.

Após a resolução, serão explicados e formalizados os conceitos de razão e proporção e radiciação, bem como suas propriedades. As estagiárias, então, entregarão a atividade 1, composta de três exercícios para ser concluída e recolhida durante o encontro. Essa atividade servirá como uma das ferramentas de avaliação da aula para analisar e qualificar a aprendizagem.

Por fim, será entregue aos discentes a lista de exercícios 2, composta por problemas do Enem que utilizam os tópicos do encontro. Essa lista pode ser levada para casa se, porventura, não sobrar tempo para finalizá-la ou por opção dos alunos.

Verificação de aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação dos alunos nas atividades propostas, resolução dos exercícios das listas e da atividade 1.

Referências:

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**, 8ª série. 2 ed. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**, 6ª série. São Paulo: Ática, 2003.

FERREIRA, R. J. O uso do jogo do varal dos números racionais como metodologia de ensino de Matemática em sala de aula. **Revista Educação Pública**, v. 20, n° 1, 2020. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/1/o-uso-do-jogo-do-varal-dos-numeros-racionais-como-metodologia-de-ensino-de-matematica-em-sala-de-aula. Acesso em: 03 out. 2022.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**, 6° ano. 3 ed. São Paulo: FTD S.A., 2015.

Apêndices

Fichas do varal das frações

Quadro 3 – Fichas do varal

$\frac{3}{4}$	$\frac{84}{79}$	$\frac{55}{106}$	$\frac{7}{16}$
$\frac{21}{16}$	$-\frac{31}{20}$	$-\frac{34}{27}$	$-0{,}758$
$-0{,}3$	$-1{,}81$	$1{,}766$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{9}}{2}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{296}{741}$
$0{,}27$	$0{,}2711$	$\frac{13}{6}$	$\frac{\sqrt{391}}{\sqrt{49}}$
$\sqrt{6}$	$\sqrt{\frac{2}{1}}$	$\sqrt{\frac{16}{4}}$	$\sqrt{\frac{25}{9}}$
$-\sqrt{7}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{\frac{49}{4}}$
$\sqrt{9}$	1	0	-2

3,05	3,50	1,5000	$\frac{233}{1000}$
$\frac{\sqrt{64}}{100}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{1}}$
$\sqrt{7}$	$-\frac{7}{33}$	$-\sqrt{8}$	$\frac{32}{\sqrt{100}}$

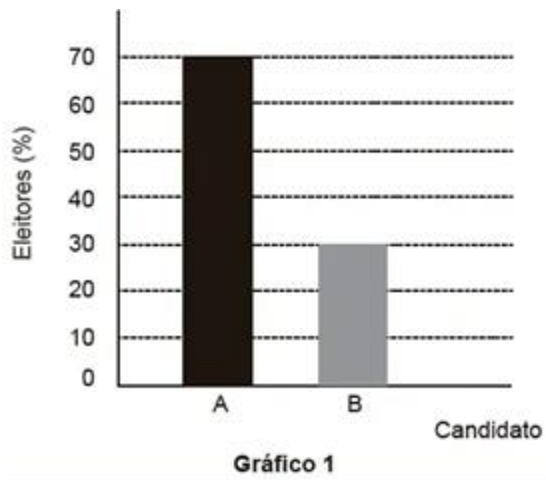
Fonte: Elaborado pelas autoras

5.2 **Material entregue aos alunos**

Lista de exercícios 1

1. (Enem 2017) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

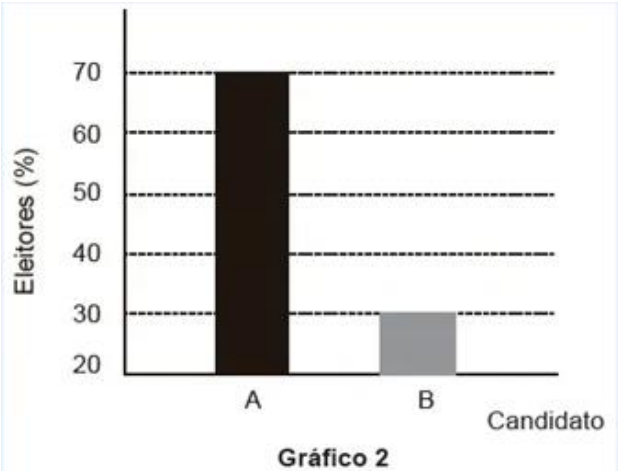
Figura 3 – Pesquisa eleitoral



Fonte: Enem (2017)

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o gráfico 2.

Figura 4 – Pesquisa eleitoral alterada



Fonte: Enem (2017)

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é

A) 0

B) $\frac{1}{2}$

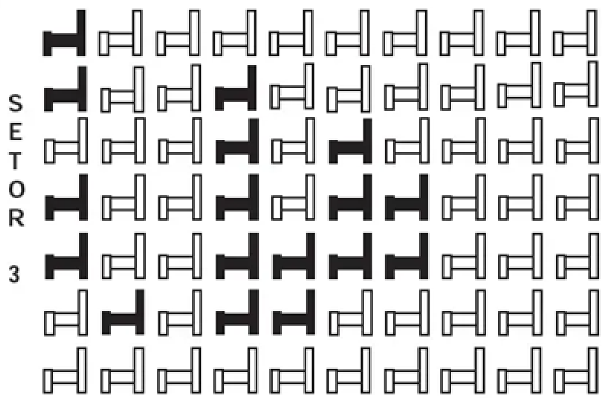
C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{2}{5}$

E) $\frac{8}{35}$

2. (Enem 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

Figura 5 – Cadeiras



Fonte: Enem (2013)

A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

A) $\frac{17}{70}$

B) $\frac{17}{53}$

C) $\frac{53}{70}$

D) $\frac{53}{17}$

E) $\frac{70}{17}$

3. (Enem 2011) O pantanal é um dos mais valiosos patrimônios naturais do Brasil. É a maior área úmida continental do planeta - com aproximadamente 210 mil km2, sendo 140 mil km2 em território brasileiro, cobrindo parte dos estados de Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. As chuvas fortes são comuns nessa região. O equilíbrio desse ecossistema depende, basicamente, do fluxo de entrada e saída de enchentes. As cheias chegam a cobrir até 2/3 da área pantaneira. Durante o período chuvoso, a área alagada pelas enchentes pode chegar a um valor aproximado de:

A) 91,3 mil km^2

B) 93,3 mil km^2

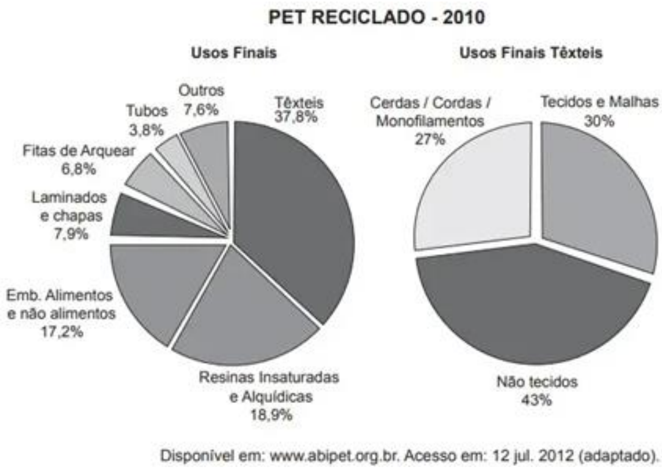
C) 140 mil km^2

D) 152,1 mil km^2

E) 233,3 mil km^2

4. (Enem 2015) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

Figura 6 – Polímero PET



Fonte: Enem (2015)

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

A) 16,0

B) 22,9

C) 32,0

D) 84,6

E) 106,6

5. (Enem 2016) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do marcador, conforme figura a seguir.

Figura 7 – Marcador de combustível

Fonte: Enem (2016)

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida. Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

A) 570

B) 500

C) 450

D) 187

E) 150

6. (Enem 2020) Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios.

A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{3}$

7. (Enem 2020 digital) Um jogo pedagógico é formado por cartas as quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{43}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi

A) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{9}$

C) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$

D) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{9}$

8. (Enem 2017) Em uma cantina, o sucesso de vendas no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$

14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

A) 1,20

B) 0,90

C) 0,60

D) 0,40

E) 0,30

Atividade 1

1) Escolha um número e o represente de quantas formas diferentes conseguir.

2) O que você entende por razão? E proporção?

3) Dê um exemplo do cotidiano em que podemos encontrar uma proporção.

Lista de exercícios 2

1. (Enem 2016) Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão.
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão.
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão.
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão.
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui maior concentração de fibras.

A marca a ser escolhida será:

a) A

b) B

c) C

d) D

e) E

2. (Enem 2011) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

a) 1 : 250.

b) 1 : 2 500.

c) 1 : 25 000.

d) 1 : 250 000.

e) 1 : 25 000 000.

3. (Enem 2019) Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

• Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital.

• O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31.000,00.

• O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso. Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

a) R$ 3.100,00

b) R$ 6.000,00

c) R$ 6.200,00

d) R$ 15.000,00

e) R$ 15.500,00

4. (Enem 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além isso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos

b) 360 tijolos

c) 400 tijolos

d) 480 tijolos

e) 600 tijolos

5. (Enem 2017) A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira a sua atenção e, por isso, deve ser evitada. Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre “às cegas” (isto é, sem ter visão da pista) uma distância proporcional ao tempo gasto a olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça. Suponha que dois motoristas (X e Y) dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X

olhando para seu celular enquanto digita a mensagem corresponde a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem, é igual a:

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{4}{1}$

e) $\frac{3}{4}$

6. (Enem 2017) Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa

equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento, foi

a) $\frac{20}{0{,}075}$

b) $\frac{20}{0{,}75}$

c) $\frac{20}{7{,}5}$

d) 20 x 0,075

e) 20 x 0,75

7**.** (Enem 2017) Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1: 400, e que seu volume é de 25 cm3.

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

a) 100.

b) 400.

c) 1.600.

d) 6.250.

e) 10.000.

8. (Enem 2021) Em uma corrida automobilística, os carros podem fazer paradas nos boxes para efetuar trocar de pneus. Nessas trocas, o trabalho é feito por um grupo de três pessoas em cada pneu. Considere que os grupos iniciam o trabalho no mesmo instante, trabalham à mesma velocidade e cada grupo trabalha em um único pneu. Com os quatro grupos completos, são necessários 4 segundos para que a troca seja efetuada. O tempo gasto por um grupo para trocar um pneu é inversamente proporcional ao número de pessoas trabalhando nele. Em uma dessas paradas, um dos trabalhadores passou mal, não pôde participar da troca e nem foi substituído, de forma que um dos quatro grupos de troca ficou reduzido.

Nessa parada específica, com um dos grupos reduzido, qual foi o tempo gasto, em segundo, para trocar os quatro pneus?

a) 6,0

b) 5,7

c) 5,0

d) 4,5

e) 4,4

5.3 **Resolução dos exercícios**

Lista de exercícios 1

Exercício 1)

Resolução:

LETRA E

Tomando cada intervalo de 10 unidades percentuais para definir as alturas dos gráficos, tem-se:

Gráfico 1 $\begin{cases} \mathrm{A} = 7 \\ \mathrm{B} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{3}{7}$ Gráfico 2 $\begin{cases} A = 5 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{1}{5}$

A diferença entre as razões é: $\frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{15-7}{35} = \frac{8}{35}$.

Exercício 2)

Resolução:

LETRA A

O desenho mostra o total de cadeiras do setor 3, sendo 7 linhas e 10 colunas, totalizando 7 x 10 = 70 cadeiras no setor. Aquelas escuras são as reservadas no total de 17 cadeiras. Logo, a razão entre quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras é: $\frac{17}{70}$.

Exercício 3)

Resolução:

LETRA C

210.000 x $\frac{2}{3} = \frac{210.000}{3}$ = 70.000 x 2 = 140 mil km².

Exercício 4)

Resolução:

LETRA C

Vemos pelos gráficos, que a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton é 37,8% (têxteis) x 30% (tecidos e malhas) x 282 (quantidade PET reciclado) = 31,97 ou arredondando = 32,0.

Ou podemos resolver por regra de 3:

282——100%

X———37,8% (têxteis)

X= 106,596

106,595——100%

X—————30% (tecidos e malhas)

X= 31,97 aproximadamente 32.

Exercício 5)

Resolução:

LETRA B

O marcador de combustível indica que ainda restam $\frac{\frac{1}{2}+1}{2}$ = $\frac{3}{4}$ do total do tanque, o que permitiria percorrer $\frac{3}{4}$ × 50 × 15 = 562,5km. Portanto, ele pode percorrer no máximo 500 km até o reabastecimento do veículo.

Exercício 6)

Resolução:

LETRA C

Pelos dados do enunciado, podemos ver que a herança foi dividida em 4 + 6 + 6 = 16 partes. Como essas 16 partes precisam ser divididas igualmente em 3, cada sócio receberá $\frac{16}{3}$ partes.

Antônio recebeu inicialmente 4 partes, então resta ele receber $\frac{16}{3} - 4 = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$ das partes.

Como Joaquim e José receberam 6 partes cada um, eles precisam dar a mesma quantidade das partes para Antônio. Dessa maneira, como Antônio deve receber $\frac{4}{3}$ das partes, temos que cada um dará $\frac{4}{3} \div 2 = \frac{4}{3} x \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$ das partes.

Ou seja, José e Joaquim possuem 6 partes da herança e precisam doar a Antônio $\frac{4}{6}$, assim, a fração será dada por: $\frac{\frac{4}{6}}{6} = \frac{4}{6} x \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.

Exercício 7)

Resolução:

LETRA A

Representando as frações dadas em números decimais, tem-se:

$\frac{3}{5}$ = 0,6

$\frac{1}{4}$ = 0,25

$\frac{2}{3}$ = 0,667

$\frac{5}{9}$ = 0,555

Colocando-as em ordem crescente, tem-se: $\frac{1}{4}, \frac{5}{9}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{2}{3}$.

Exercício 8)

Resolução:

LETRA E

Usando dois terços do volume embalagem de polpa morango gastam–se $\frac{2}{3}$ x 18 = 12 reais, mais um terço do volume da embalagem da polpa de acerola, $\frac{1}{3}$ x 14,70 = 4,90 totalizando um custo de 16,90.

Com o aumento de preço da polpa de acerola em 60 centavos, o custo total desta parte muda para: $\frac{1}{3}$ x 15,30 = 5,10

Mantendo o preço total em 15,90, o preço gasto com morango será de: 16,90 – 5,10 = 11,80. Porém, esse preço representa $\frac{2}{3}$ x = 11,80 e por isso x = 17,70. Logo, a diminuição é de R$ 0,30.

Resolução da atividade 1: resposta pessoal.

Lista de exercícios 2

Exercício 1)

Resolução:

LETRA B

Após fazer as simplificações, temos que as concentrações de cada uma das marcas são: A = $\frac{1}{25}$, B = $\frac{1}{8}$, C = $\frac{1}{20}$, D = $\frac{1}{15}$ e E = $\frac{1}{10}$. E como o numerador é o mesmo para todas, a maior concentração será a que possui denominador menor, pois são grandezas inversamente proporcionais. Logo a marca de maior concentração é a B = $\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Exercício 2)

Resolução:

LETRA E

Podemos representar essa escala pela razão $\frac{2000\ km}{8\ cm}$, porém temos grandezas diferentes e precisamos transformar uma delas. Vamos transformar para cm pois escala é normalmente dada em cm. Logo, $\frac{2000\ km}{8\ cm} = \frac{200.000.000 cm}{8cm} = \frac{25.000.000cm}{1cm}$. Assim, a cada 1 cm no papel temos 25.000.000 cm na realidade, ou seja, letra E.

Exercício 3)

Resolução:

LETRA B

Como o valor a ser pago por cada empresa é inversamente proporcional à idade de uso temos: R1 $= \frac{k}{2}$, R2 $= \frac{k}{3}$ e R3 $= \frac{k}{5}$. Sabemos, pelo enunciado que R1+R2+R3= 31.000, portanto, $\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} \ = 31.000 \Longrightarrow k = 30.000.$ Assim R3$= \frac{k}{5} = \frac{30.000}{5} =$ R$ 6 000.

Exercício 4)

Resolução:

LETRA D

Como existe uma proporção, podemos resolver por regra de três. $\frac{1500}{1200} = \frac{900}{x} \Longrightarrow x = 720.$ Isto é, 900 telhas equivalem a 720 tijolos. Portanto, para saber quantos tijolos podem ser acrescentados a essa quantidade de telhas, basta fazer a subtração 1200-720= 480 tijolos.

Exercício 5)

Resolução:

LETRA B

$$\frac{D1}{D2} = \frac{V.T1}{V.T2} = \frac{0{,}25T2}{T2} = 0{,}25 = \frac{1}{4}.$$

Exercício 6)

Resolução:

LETRA B

A quantidade de gasolina é igual a $\frac{1}{3} \times 0{,}6 \times \frac{100.000}{750} = \frac{60.000}{2.250} = \frac{20}{0{,}75}$.

Exercício 7)

Resolução:

LETRA C

Como a escola é $\frac{1cm}{400cm}$, mas estamos tratando de cm^3, teremos $(\frac{1}{400})^3$. Por regra de três chegamos que o volume original é $400^3 \times 25 = 1{,}6\,.\,10^9\ cm^3 = 1.600m^3$.

Exercício 8)

Resolução:

LETRA A

Como temos uma proporção, podemos resolver por regra de três $\frac{3}{2} = \frac{4}{x}$. Mas as grandezas pessoas e tempo são inversamente proporcionais, portanto, invertemos uma das razões. Assim $\frac{3}{2} = \frac{x}{4} \Longrightarrow x = 6s$.

5.4 **Relatório**

Relatório do encontro 1 - 08/10/2022

No dia oito de outubro de 2022, às 8:35 da manhã, realizamos o primeiro encontro do Promat na sala A219.

Inicialmente, nos apresentamos e solicitamos que os alunos se juntassem em duplas, a fim de realizar uma dinâmica de apresentação. Como os alunos estavam em um número ímpar, formou-se também um trio. Explicamos a dinâmica de modo que cada aluno teria um minuto para conhecer seu colega e após, descrevê-lo para a turma com o máximo de características que conseguisse lembrar. Após alguns minutos, questionamos os alunos se o tempo foi suficiente para se conhecerem, eles relataram que o tempo foi insuficiente, então tiveram mais um minuto para concluírem. Em seguida, iniciou-se a apresentação dos alunos por fila, de acordo com a proposta.

Percebemos que alguns alunos tiveram facilidade, enquanto outros demonstraram um pouco de timidez. A aluna que fazia parte o trio não quis falar. Encerrada a dinâmica de apresentação, as estagiárias falaram novamente seus nomes, idade, cidade em que residem e porque escolheram fazer o curso de matemática.

Logo depois, iniciamos a dinâmica do varal, posicionando na reta numérica os números 0, 1, $\sqrt{9}$ e -2. Em seguida, distribuímos uma ficha numérica para cada aluno e reservamos determinado tempo para que pensassem e conversassem com os colegas sobre onde devia ser posicionado seu número na reta. Uma aluna questionou se podia usar calculadora e nós não proibimos, mas estimulamos a turma a pensar, tendo em vista que no Enem não é permitido o seu uso. Após aproximadamente cinco minutos, os alunos se dirigiram voluntariamente até o varal para posicionar a plaquinha recebida. Percebemos que os alunos se sentiram dispostos e interessados a participar da atividade, tornando o momento muito proveitoso para a aula.

Dando sequência a aula, realizamos a correção da reta numérica de modo coletivo, solicitando a interação dos alunos. Alguns alunos tiveram dúvidas nos números fracionários e com raiz. Por isso, comentamos como localizar o valor de uma raiz na reta numérica, abordando frações e as relacionando com o dinheiro. Também comentamos que existe raiz negativa, mas que não existe raiz de número negativo na reta real.

Prosseguindo com o encontro, exemplificamos como aproximar o valor de uma raiz não exata, trabalhamos racionalização de raiz e demonstramos como realizar a racionalização para “tirar” a raiz do denominador da fração e mencionamos que posteriormente explicaríamos as propriedades de radiciação.

Ainda na correção do varal, destacamos que um mesmo número pode ser representado de formas diferentes, bem como que cada um possui um posicionamento na reta real. Ainda ressaltamos como resolver raiz de fração, a partir das suas propriedades.

Seguindo, explicamos sobre fração e suas definições: própria, imprópria, mista, aparente e irredutível. Também abordamos como realizar as quatro operações com frações e multiplicação e divisão de números decimais, apresentando como transformá-los em uma fração. Em seguida, entregamos a primeira lista com exercícios do Enem e orientamos que os alunos poderiam dialogar com os colegas ou chamar as estagiárias para esclarecerem dúvidas, mas, que evitassem o uso de calculadora.

Enquanto os alunos resolviam as questões, passamos a lista de presença onde os alunos escreveram seu nome e número de telefone para serem adicionados ao grupo de *WhatsApp* da turma.

Enquanto os alunos resolviam os exercícios, percebemos que alguns alunos se assustaram um pouco ao receber a lista de exercícios. Durante sua resolução, as estagiárias e o professor orientador circularam pela sala, auxiliando os alunos no desenvolvimento dos exercícios, sendo possível notar que alguns alunos tinham dúvidas bem básicas, como interpretação de gráficos, fração e números decimais, às vezes até por falta de interpretar a questão. Neste momento, foi feito um intervalo para o lanche.

Após o intervalo, a estagiária Stephany corrigiu o primeiro exercício da lista, mostrando duas formas de resolução. Na sequência, pausadamente, fizemos a leitura de um exercício do Enem para introduzir o próximo conteúdo de razão e proporção, a partir da comparação entre grandezas. Durante a resolução, um aluno questionou se sempre seria utilizada a divisão para relacionar as grandezas nesse tipo de situação-problema, e foi explicado que, como a multiplicação e divisão são operações opostas, ela também pode ser usada para fazer essa comparação, tomando o caminho inverso.

Depois da resolução, perguntamos se os alunos tinham noção do que é e como é realizada a razão e proporção. A partir disso, registramos no quadro alguns conceitos e definições, acompanhados de alguns exemplos. Assim, foi possível construir a ideia de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, bem como recordar alguns conceitos já trabalhados no encontro. Também relembramos que a porcentagem como um tipo de fração.

Pedimos aos alunos para citar exemplos de proporção presentes no cotidiano. uma aluna citou a relação da quantidade de quilômetros por litro de combustível. Posteriormente, foi registrado no quadro as definições de proporção, radiciação e racionalização, bem como suas propriedades, dando alguns exemplos. Feito isso, entregamos uma atividade composta por três exercícios para ser finalizada e entregue ainda durante o encontro. Instruímos a sala que não havia a necessidade de identificação nessa atividade, mas que serviria como ferramenta de avaliação do aprendizado. Logo após, entregamos a segunda lista de exercícios do Enem, para que os alunos resolverem em casa por falta de tempo para finalizarem durante a aula.

A maioria dos alunos acertaram inteiramente a atividade 1. Entretanto, foi possível perceber que ainda restaram dúvidas, sobretudo nos itens “b” e “c”, porque algumas explicações estavam confusas. Além disso, cinco alunos deixaram pelo menos uma das questões em branco.

Foi possível observar nesse primeiro encontro que os alunos demonstraram bastante interesse nos conteúdos trabalhados e atividades propostas. Percebemos, também, que poderíamos ter abordado os conceitos e propriedades de uma forma menos teórica e mais aplicada, produzindo uma aula menos cansativa.

6. **Encontro 2:**

6.1 **Plano de aula**

Plano de aula – segundo encontro – 15/10/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Equações, sistemas de equações e função afim.

Objetivo geral: Compreender os conceitos e aplicá-los na resolução de questões do Enem.

Objetivos específicos:

- Modelar e representar situações-problema por meio de uma equação matemática;
- Resolver uma equação ou um sistema de equações de diferentes formas;
- Construir a ideia de função;
- Identificar uma função afim;
- Relacionar as variáveis e traçar o gráfico de uma função a partir de seus pontos;
- Diferenciar equações e funções;
- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Folha sulfite e quadriculada, lousa, giz, cartelas, atividades impressas, bingo e *GeoGebra*.

Encaminhamento metodológico:

Na sexta-feira anterior ao encontro, os alunos serão instruídos, pelo grupo do *WhatsApp*, a baixar o aplicativo do *GeoGebra* a fim de facilitar e agilizar a condução da aula. No sábado, inicialmente, serão tiradas as possíveis dúvidas que restaram das listas anteriores, mesmo após o envio da resolução e gabarito.

Na sequência, os alunos serão divididos em grupos de três ou quatro integrantes (preferencialmente quatro) e será iniciada a primeira dinâmica. Serão colocadas algumas cartelas no centro da sala, de forma que fiquem viradas para baixo. Nelas, existem frases, equações ou resultados. Cada grupo, na sua vez, deve eleger um representante para escolher duas cartelas e tentar formar pares, como um jogo da memória matemático. Se não encontrar uma igualdade entre as cartelas, o grupo passa a vez. Ao fim do jogo, vence quem tiver o maior número de pares. Durante a atividade, cada estudante receberá uma folha sulfite para registrar seus raciocínios e cálculos.

Posteriormente, será apresentada a situação-problema abaixo para ser resolvida de forma colaborativa, com o intuito de demonstrar três diferentes formas de resolver um sistema de equações (substituição, adição e comparação). Ao fim da questão, os alunos serão liberados para o intervalo até às dez horas.

<u>Situação-problema:</u>

Em um escritório de advocacia trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como o Dr. André e o Dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretaria Cláudia coloca 1 grampo em cada processo do Dr. André e 2 grampos em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que, ao todo, são 78 processos nos quais foram usados 110 grampos. Calcule o número de processos do Dr. Carlos.

Na volta, os alunos, ainda em grupos, serão direcionados à segunda dinâmica. Cada grupo receberá duas ou três funções juntamente coma a tabela abaixo e deverão sortear quatro ou cinco números, no bingo, para o grupo seguinte. Os números sorteados devem, também, ser escritos no quadro. Exemplo: o grupo A sorteia os números -7, 3, 5 e 2 para o grupo B, esses valores devem ser anotados no quadro e na tabela do grupo B, pois representam alguns possíveis valores de x, para os quais buscamos saber a imagem. O objetivo desse sorteio é que haja maior interação entre os grupos e movimentação na sala, o que não aconteceria se apenas apontássemos os mesmos valores de x para todos.

Após os sorteios, os estudantes devem encontrar o valor da função naquele ponto, isto é, a imagem do número sorteado e, depois, construir o gráfico de cada uma das funções dadas, a partir de seus pontos. Para isso, será entregue uma folha de papel quadriculado a todos. Com o gráfico esboçado no papel quadriculado, os discentes deverão conferir seus gráficos no aplicativo *GeoGebra*, baixado anteriormente. Apesar de ser uma atividade prática em que os alunos são os sujeitos ativos, as estagiárias ficarão circulando entre os grupos para tirar possíveis dúvidas, mas antes, induzindo-os a pensar.

Por fim, será entregue aos discentes uma lista de exercícios, composta por problemas do Enem que abordam os conteúdos do encontro. Enquanto a turma a resolve, as estagiárias estarão disponíveis e atentas para auxiliar e responder quaisquer perguntas. A lista pode ser levada para casa se, porventura, não sobrar tempo para finalizá-la ou por opção dos alunos.

Verificação de aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas dinâmicas, atividades propostas e resolução de exercícios. E, ainda, a partir das anotações, hipóteses e cálculos registrados pelos discentes nas folhas durante o encontro.

Referências:

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**, 8ª série. 2 ed. São Paulo: Ática, 2008.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar**, 1: conjuntos e funções. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a matemática**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAULINO, C. L. et. al. Jogo memória das equações: atividades de ensino. **Revista Conhecimento Online**, Novo Hamburgo, n° 10, p.120-134, 2018.

SILVA, L. P. M. Diferenças entre função e equação. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/diferencas-entre-funcao-equacao.htm. Acesso em: 11 out. 2022.

SYPNIEVSKI, M. S.; OLIVEIRA, A. Z. P.; SANTOS, Douglas M. M. Bingo de funções: uma abordagem lúdica do conceito de função afim e do estudo de seu gráfico. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, n° 13, 2019, Cuiabá. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/download/1511/839. Acesso em: 11 out. 2022.

Apêndices

Fichas do jogo da memória

Quadro 4 – Fichas

A SOMA DE UM NÚMERO COM SEIS É IGUAL A NOVE	$x = 3$	O QUÁDRUPLO DE UM NÚMERO É IGUAL A 8	$x = 2$
O DOBRO DE UM NUMÉRO MAIS UM É IGUAL A ZERO	$x = -\frac{1}{2}$	METADE DA DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E TRÊS	$\frac{x-3}{2}$
A METADE DA DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E TRÊS É IGUAL A 4	$x = 11$	SOMA DE UM NÚMERO COM SEUS TRÊS QUARTOS	$x + \frac{3}{4}x$
A SOMA DE UM NÚMERO COM SUA TERÇA PARTE É IGUAL A 1	$x = \frac{3}{4}$	DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E QUATRO, DIVIDO POR TRÊS	$\frac{x-4}{3}$

SOMA DE UM NÚMERO COM SEUS TRÊS QUARTOS	$x + \frac{3}{4}x$	DOBRO DA DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E UM	$2(x-1)$
A DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E SETE É IGUAL A -1	$x = 6$	A SOMA DE QUATRO COM UM NÚMERO É IGUAL A ONZE	$x = 7$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 5 – Fichas do jogo

TRIPLO DE UM NÚMERO SUBTRAÍDO DE QUATRO	$4-3x$	DIFERENÇA ENTRE O QUÍNTUPLO DE UM NÚMERO E DEZ, DIVIDIDA POR QUATRO	$\frac{5x-10}{4}$
UM MEIO DA SOMA DE UM NÚMERO COM NOVE.	$\frac{1}{2}(\mathrm{x}+9)$	SOMA DE SEIS E UM NÚMERO MENOS O SEU PRODUTO	$(6+x)-6x$
QUOCIENTE DO DOBRO DE UM NÚMERO POR QUATRO	$\frac{2x}{4}$	DIFERENÇA ENTRE O TRIPLO DE UM NÚMERO COM SUA METADE	$3x - \frac{x}{2}$
O QUOCIENTE DO DOBRO DE UM NÚMERO POR CINCO É IGUAL A QUATRO	$x = 10$	QUATRO VEZES A SOMA DE SETE COM UM	$4(7+1)$
PRODUTO DE DEZ PELA DIFERENÇA DE UM NÚMERO E DOIS	$10\ (x-2)$	OITO VEZES A SOMA DE TRÊS COM UM NÚMERO É IGUAL A 24	$x = 0$
DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E SUA METADE	$x - \frac{x}{2}$	DOBRO DA SOMA DE DOZE COM UM NÚMERO	$2(12+x)$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 6 – Fichas do jogo da memória

DIFERENÇA ENTRE CEM E UM NÚMERO	$100 - x$
QUÁDRUPLO DA SOMA DE UM NÚMERO COM CINCO	$4(x+5)$
TRIPLO DA SOMA DE UM NÚMERO COM QUATRO	$3(x+4)$
DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO E SEUS SETE OITAVOS	$x - \frac{7}{8}x$
QUARTA PARTE DA SOMA DE UM NÚMERO COM DOIS	$\frac{x+2}{4}$

A METADE DE UM NÚMERO MENOS TRÊS É IGUAL A 10	$x = 26$

Fonte: Elaborado pelas autoras

6.2 Material entregue aos alunos

Tabelas das funções

Quadro 7 – Função -6x+3

$f(x) = 2x + 3$	
Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 8 – Função x-9

$f(x) = x - 9$	
Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 9 – Função 7x

$f(x) = 7x$	
Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 10 – Função x^3+16

$f(x) = 4x + \frac{3}{2}$

Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 11 – Função -8x/7-3

$f(x) = -\frac{8x}{7} - 3$	
Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 12 – Função 8+2x

$f(x) = -11x + 2$	
Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 13 – Função -4x+3/2

$f(x) = -4x + \frac{3}{2}$	
Valores de x	Valores de f(x)

Fonte: Elaborado pelas autoras

Lista de exercícios

1. (Enem 2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

a) Y = 80X + 920.

b) Y = 80X + 1 000.

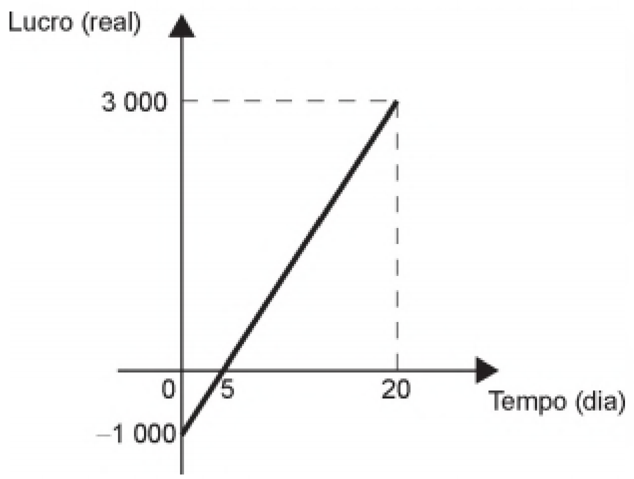
c) Y = 80X + 1 080.

d) Y = 160X + 840.

e) Y = 160X + 1 000.

2. (Enem 2017) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

Figura 8 – Lucro



Fonte: Enem (2017)

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é:

a) L(t) = 20t + 3 000

b) L(t) = 20t + 4 000

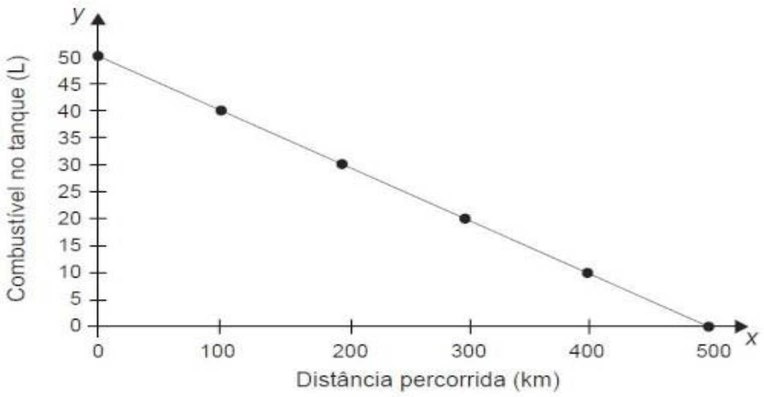
c) L(t) = 200t

d) L(t) = 200t – 1 000

e) L(t) = 200t + 3 000

3. (Enem 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

Figura 9 – Combustível no tanque



Fonte: Enem (2018)

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a) $y = 10x + 500$

b) $y = \frac{-x}{10} + 50$

c) $y = \frac{-x}{10} + 500$

d) $y = \frac{x}{10} + 50$

e) $y = \frac{x}{10} + 500$

4. (Enem Digital 2020) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2 385,00

b) 2 650,00

c) 3 300,00

d) 3 950,00

e) 5 300,00

5. (Enem Digital 2020) Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12.800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos.

Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

a) 26

b) 46

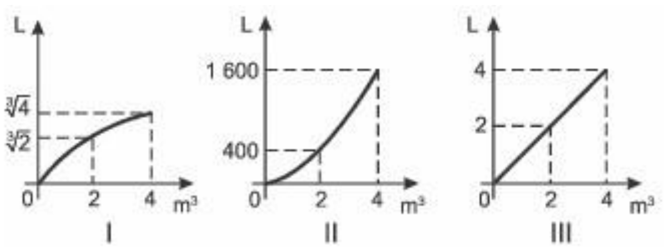
c) 109

d) 114

e) 115

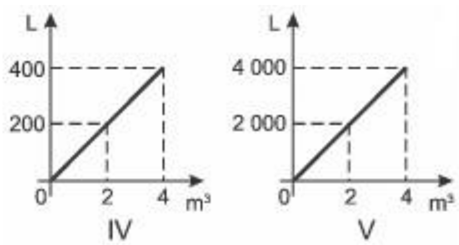
6. (Enem PPL 2020) Um professor pediu aos seus alunos que esboçassem um gráfico representando a relação entre metro cúbico e litro, utilizando um software. Pediu ainda que representassem graficamente os pontos correspondentes às transformações de 0 m³, 2 m³ e 4 m³ em litro. O professor recebeu de cinco alunos os seguintes gráficos:

Figura 10 – Litro



Fonte: Enem (2020)

Figura 11 – Metro cúbico



Fonte: Enem (2020)

O gráfico que melhor representa o esboço da transformação de metro cúbico para litro é o do aluno

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

7. (Enem Digital 2020) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$1.200,00 por hectare plantado, e vendia por R$50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

a) $L(x) = 50x - 1\,200$

b) $L(x) = 50x - 12\,000$

c) $L(x) = 50x + 12\,000$

d) $L(x) = 500x - 1\,200$

e) $L(x) = 1\,200x - 500$

8. (Enem 2011) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n) acrescido de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$

b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$

e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

9. (Enem 2ª aplicação 2010) Algumas pesquisas es tão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta são de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco. Considere que uma pessoa

adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

a) 58 g e 456 g

b) 200 g e 200 g

c) 350 g e 100 g

d) 375 g e 500 g

e) 400 g e 89 g

10. (Enem 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30

b) 36

c) 50

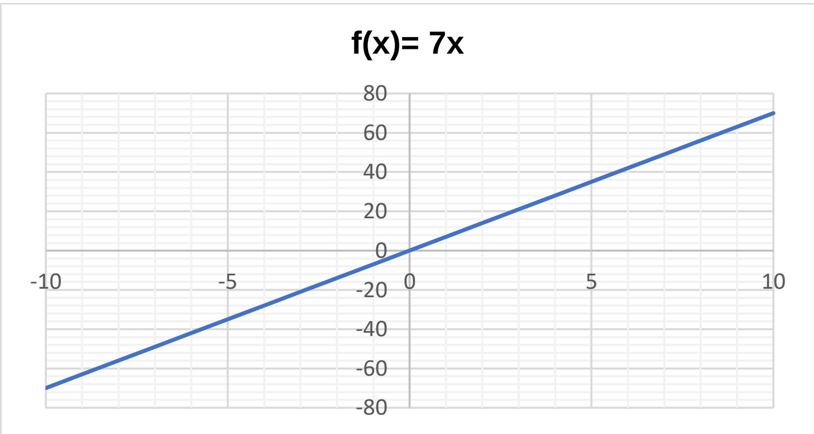
d) 60

e) 64

6.3 **Resolução dos exercícios**

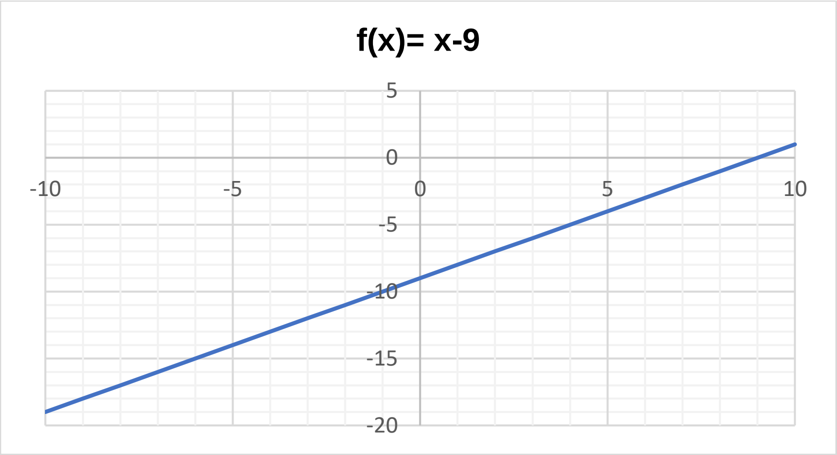
Gráficos das funções

Figura 12 – Função 7x



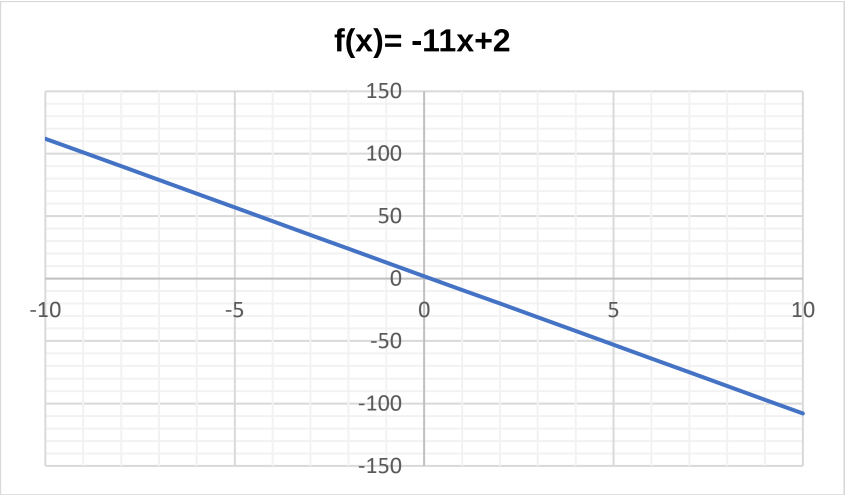
Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 13 – Função x-9



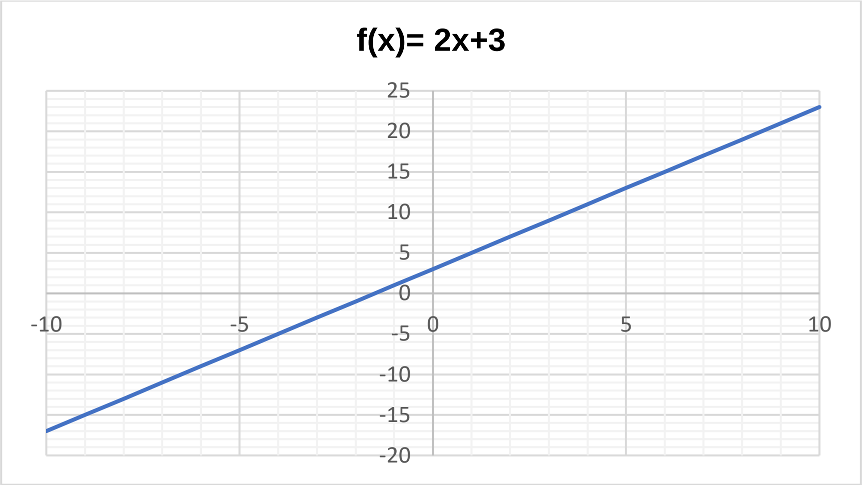
Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 14 – Função -11x+2



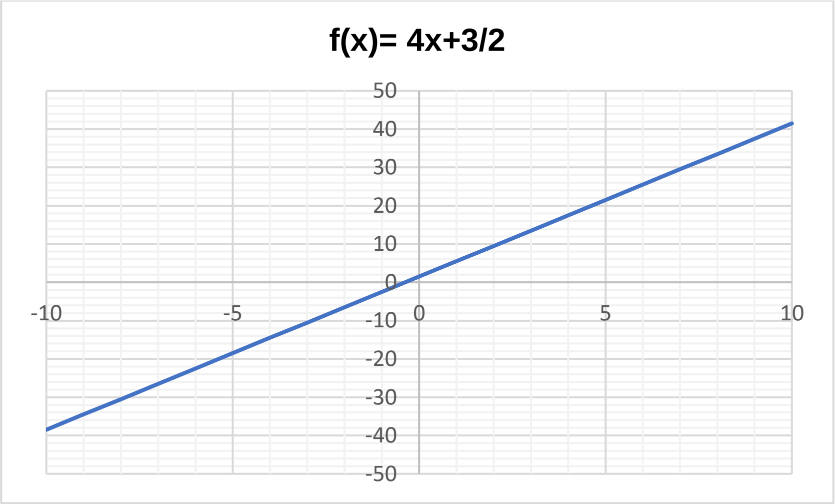
Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 15 – Função 2x+3



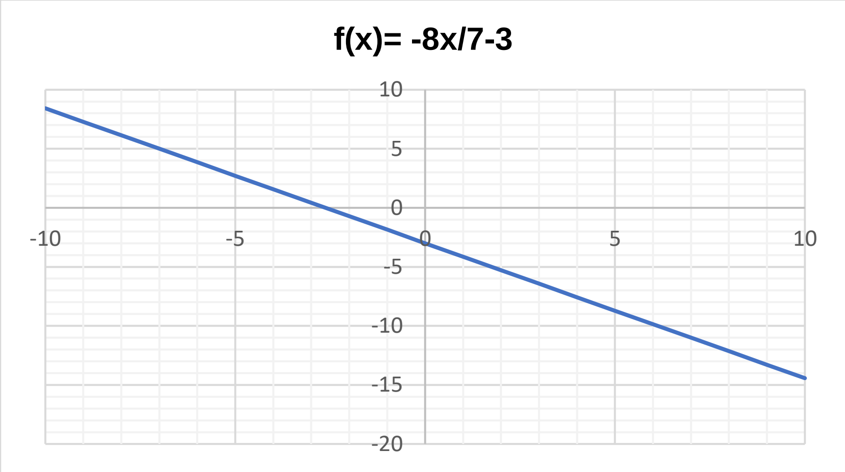
Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 16 – Função 4x+3/2



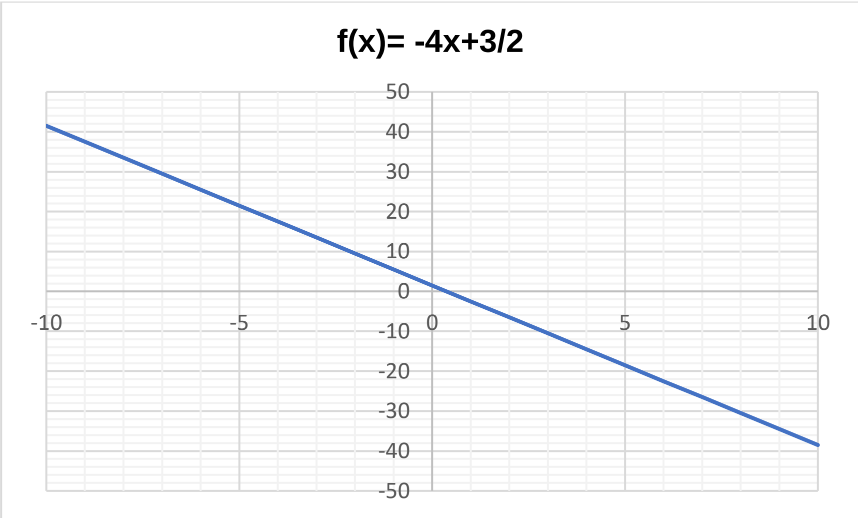
Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 17 – Função -8x/7-3



Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 18 – Função -4x+3/2



Fonte: Elaborado pelas autoras

Resolução da situação-problema

Dr. André: x

Dr. Carlos: y

x + y = 78	x + 2y = 110	x = 78 - y
x+ 2y = 110	78 – y + 2y = 110	x = 78 – 32
x + y = 78	y = 110 – 78	x = 46
x = 78 – y	y = 32	

Lista de exercícios

Exercício 1)

Resolução:

LETRA D

O número de funcionários diaristas é dado por X – 1, pois o gerente não é diarista. Então, o valor gasto pela empresa é dado pela lei de formação:

$$Y = 160 \cdot (X - 1) + 1000$$

$$Y = 160X - 320 + 1000$$

$$Y = 160X + 840.$$

Exercício 2)

Resolução:

LETRA D

Analisando o gráfico, é possível perceber que ele é uma <u>função do 1º grau</u>, da forma $L(t) = at + b$.

Note que o gráfico parte do ponto (0, – 1000), ou seja, quando $t = 0$, $L(t) = -1000$, então $b = -1000$.

Logo, a função será:

$$L(t) = at - 1000$$

Agora, para encontrar o valor de a, basta analisar que, quando $t = 20$, $L(t) = 3000$. Substituindo na fórmula, teremos:

$$3000 = 20a - 1000$$

$$3000 + 1000 = 20a$$

$$4000 = 20a$$

$$a = 4000/20$$

$$a = 200.$$

Então, a representação algébrica será:

$$L(t) = 200t - 1000.$$

Exercício 3)

Resolução:

LETRA B

Note que o gráfico é uma reta, o que faz com que essa expressão algébrica seja de uma função polinomial do 1º grau.

$$y = ax + b$$

Analisando o gráfico, sabemos que, quando x = 0, y = 50.

$$50 = a \cdot 0 + b$$

$$50 = b$$

Logo, podemos representar a expressão algébrica por:

$$y = ax + 50$$

Podemos observar também que, quando y = 0, x = 500, então:

$$0 = 500a + 50$$

$$-50 = 500a$$

$$a = \frac{-50}{500}$$

$$a = -\frac{1}{10}$$

A expressão algébrica procurada é:

$$y = -\frac{x}{10} + 50.$$

Exercício 4)

Resolução:

LETRA B

Podemos resolver esta questão de matemática do ENEM 2020 (aplicação digital) usando sistemas lineares. Sejam H a quantidade de homens e M a quantidade de mulheres, então:

$$H + M = 132 \text{ (I)}$$

$$M = H + 26 \text{ (II)}$$

Basta aplicar (II) em (I).

$$H + H + 26 = 132$$

$$2H = 132 - 26$$

$$2H = 106$$

$$H = 53$$

Agora é só multiplicar 53 por R$ 50,00 e teremos R$ 2 650,00.

Exercício 5)

Resolução:

LETRA E

Inicialmente, vamos montar a função do primeiro grau L(x) que representa o lucro em função de X pacotes de chaveiros vendidos mensalmente.

Cada pacote de chaveiro é vendido no mercado por R$ 280,00. Ele custa para a microempresa 400 x R$ 0,42 = R$ 168,00. Ou seja, cada pacote proporciona um lucro de 280 - 168 = R$ 112,00.

Se vender X pacotes, terá lucro de 112X.

Entretanto, a microempresa tem um custo fixo mensal de R$ 12 800,00. Então, a função L(X) pode ser escrita da seguinte forma:

$L(X) = 112\,X - 12\,800$

Com esta função estabelecida, podemos responder o comando da questão: "qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês? "

Basta fazer $L(X) > 0$

$112\,X - 12\,800 > 0$

$112\,X > 12800$

$X > 12\,800 / 112$

$X > 114{,}29$

X é um número inteiro, então, no mínimo, X = 115 unidades.

Exercício 6)

Resolução:

LETRA E

Para resolver esta questão do ENEM 2020 (Reaplicação/PPL) precisamos ter em mente a seguinte conversão entre unidades de medidas:

$$1\text{ m}^3 = 1.000\text{ litros}$$

Um detalhe importante é que o gráfico tem que possuir um formato linear, ou seja, o formato de uma equação de reta. Além disso, este gráfico deve conter os seguintes pontos:

$$2\text{ m}^3 = 2.000\text{ litros}$$

$$4\text{ m}^3 = 4.000\text{ litros}$$

O único gráfico que atende a estas condições é o do aluno V.

Exercício 7)

Resolução:

LETRA B

O lucro desse produtor pode ser expressado numa função que é composta por dois elementos, a quantidade que ele consegue arrecadar vendendo as sacas de 60 kg e os custos com os hectares onde ele planta essa soja.

Os custos podem ser definidos pela multiplicação entre o valor gasto pela quantidade de hectares que ele possui. Como o exercício nos informa que o valor é igual a R$ 1 200,00 e o produtor possui um total de 10 hectares, faremos da seguinte forma:

$$\text{custo} = 1\,200 * 10$$

$$\text{custo} = 12\,000$$

Da mesma maneira, a arrecadação das vendas é uma multiplicação do valor de cada saca de 60 kg pela quantidade de sacas vendidas (x), que ficaria da seguinte forma:

$$\text{arrecadação} = 50 * X$$

$$\text{arrecadação} = 50X$$

Sabendo que o Lucro, definido como L(x), é igual a arrecadação menos o custo, a expressão pode ser definida como:

$$L(x) = \text{arrecadação} - \text{custo}$$

$$L(x) = 50X - 12\,000$$

Portanto, a alternativa que indica a mesma expressão encontrada é a letra B.

Exercício 8)

Resolução:

LETRA A

Podemos descrever essa situação pela equação:

A equação que representa o valor da primeira empresa é $V1 = 100\,000n + 350\,000$, e a da segunda empresa é $V2 = 120\,000n + 150\,000$.

Igualando as duas equações, temos que:

$$100\ 000n + 350\ 000 = 120\ 000n + 150\ 000$$

Dividindo por 1000, a equação será:

$$100n + 350 = 120n + 150.$$

Exercício 9)

Resolução:

LETRA C

Após resolvermos o sistema de equações descobrimos que a será necessário 350g arroz e 100g de feijão.

Montando um sistema:

Aqui precisamos utilizar a proporção de cada nutriente presente em 100g de alimento. Com isso a soma das quantidades presentes em 100 gramas multiplicadas pelas incógnitas nos dará a quantidade proporcional.

Vejamos:

$$x = \text{arroz}$$

$$y = \text{feijão}$$

$$1{,}5x + 7y = 12{,}25$$

$$2x + 3y = 10$$

$$x = (10 - 3y)/2$$

$$3/2\ .\ (10 - 3y)/2 + 7y = 12{,}25$$

$$30 - 9y + 28y = 49$$

$$19y = 19$$

$$y = 1$$

$$x = (10 - 3.1) / 2$$

$$x = 7/2$$

$$x = 3{,}5$$

Como é proporcional a 100g temos:

$$\text{arroz} = 100\ .\ 3{,}5 = 350g$$

$$\text{feijão} = 100\ .\ 1 = 100g$$

Exercício 10)

Resolução:

LETRA A

Temos que:

$$x = n^{o} \text{ de acertos};$$

$$y = n^{o} \text{ de erros}$$

Assim,

$$20x - 10y = 100 \implies 2x - y = 10$$

Temos também:

$x + y = 80$

Temos um sistema de equações lineares, basta resolver para encontrar x.

Somando as duas equações:

$$3x = 90x \implies x = 30.$$

6.4 **Relatório**

Relatório do encontro 2 - 15/10/2022

No dia quinze de outubro de 2022, às 8:07 da manhã, realizamos o segundo encontro do Promat na sala A219.

Inicialmente, perguntamos aos alunos se possuíam dúvidas com relação às listas de exercícios entregues na aula anterior. Duas alunas não conseguiram interpretar corretamente e solucionar dois deles: o exercício cinco da primeira lista, a respeito de fração; e o exercício três da segunda lista, sobre razão e proporção. A estagiária Stephany resolveu o primeiro no quadro e a outra dúvida foi tratada individualmente. Após a resolução, escrevemos no quadro o gabarito das duas listas.

Dando sequência à aula, pedimos que a turma se dividisse em grupos de quatro alunos a fim de realizarmos a atividade do jogo da memória. Como os alunos não estavam em múltiplos de quatro, formou-se também um trio e seus integrantes jogaram individualmente. Após a formação dos grupos distribuímos uma folha sulfite para cada aluno, para o desenvolvimento de seu raciocínio, e doze cartas para cada grupo. Explicamos a proposta e iniciamos a dinâmica.

Durante a execução da atividade, percebemos que os grupos tiveram dificuldade em entender como o jogo funcionava. Dois grupos apresentavam dúvidas matemáticas muito básicas em equações e operações de forma geral. Estes precisaram de auxílio das estagiárias e demoraram um pouco mais a pegar o ritmo da atividade. Os outros três grupos, conseguiram encontrar os pares do jogo com bastante agilidade. Em todos os grupos, foi possível ver claramente a evolução dos alunos tanto para interpretar e escrever a equação como para resolvê-la. De forma geral, as principais dúvidas surgiram em interpretar as fichas e encontrar o valor da incógnita em algumas das situações. A dinâmica levou mais tempo que o esperado, mas foi muito produtiva e interessante.

Prosseguindo com o encontro, pedimos para cada grupo escolher o par de cartas que achou mais difícil. Então, um integrante leu a carta em voz alta, explicou o porquê da dificuldade e como resolveram. Na sequência, resolvemos as cartas escolhidas no quadro com a participação de toda a turma. Após esse momento, realizamos um intervalo para o lanche.

Depois do intervalo, a estagiária Ana questionou se os alunos sabiam o que era uma equação e uma das alunas respondeu que era uma conta. A estagiária voltou a questionar a sala ‘’mas que tipo de conta?’’, a fim de induzir a formalização da resposta. Um dos alunos respondeu então, que “se trata de uma expressão com incógnitas e uma igualdade”. A partir disso, introduzimos o conteúdo de sistemas de equações com um exemplo no quadro.

Logo, lemos e resolvemos uma questão do Enem de modo colaborativo, destacando a adição e substituição como métodos para solucionar esse tipo de sistema.

Após a resolução, iniciamos a dinâmica do bingo entregando aos grupos duas funções e uma folha quadriculada. Explicamos que um integrante de cada grupo deveria sortear cinco números para o próximo grupo. Números esses, que representavam o valor de x e que deveriam ser registrados nas tabelas, em sua respectiva coluna. A outra coluna indicava o valor de x na função, isto é, f(x). Os alunos fizeram o cálculo das imagens e marcaram os pontos do gráfico da função na malha quadriculada. Os alunos surpreenderam positivamente as estagiárias com tanta vontade e interesse para realizar a dinâmica.

Alguns grupos tiveram mais dificuldade para encontrar as respectivas imagens, pois receberam funções mais complexas que resultavam em frações irredutíveis grandes, mas mesmo assim não desanimaram.

Todos os grupos fizeram muitas perguntas e foram muito participativos durante a atividade. Percebemos que os dois grupos que apresentaram dificuldade na atividade anterior precisaram de mais assistência e explicações individuais por não dominarem a matemática básica, por exemplo, não conseguiram perceber que f(x) é igual a y, sem intervenção. De forma geral, as principais dúvidas surgiram para construir os esboços dos gráficos das funções, pois algumas imagens eram muito maiores que outras e os alunos não sabiam como esquematizar isso.

Todos os grupos conseguiram finalizar a tabela e entregar pelo menos um gráfico de cada função, mesmo que incompleto.

Ao fim da dinâmica a estagiária Giulia iniciou o conceito de função afim questionando aos alunos se sabiam o que era. Alguns responderam que não lembravam e outros que era quando uma coisa estava em função de algo. Definimos, então, formalmente o conceito no quadro.

Na sequência, questionamos se eles lembravam de alguma situação presente em nosso cotidiano que aparecesse uma relação de dependência entre as variáveis e um aluno citou a tarifa do táxi em relação aos quilômetros rodados, como exemplo recorrente em questões do Enem. Posteriormente, pedimos para que eles analisassem as tabelas do bingo e identificassem quais funções eram do tipo função afim. Os alunos identificaram corretamente as funções: $f(x) = 4x + \frac{3}{2}$; $f(x) = 2x + 3$; $f(x) = -\frac{8x}{7} - 3$; $f(x) = -11x + 2$; $f(x) = -4x + \frac{3}{2}$; porém, dois grupos não perceberam que $f(x) = 7x \; e \; f(x) = x - 9$ eram funções da forma $y = ax + b$.

Encerrando o encontro, entregamos uma lista de exercícios do Enem para ser resolvida em casa, pois não houve tempo para realizá-la em sala.

Durante o encontro percebemos que o uso de jogos e dinâmicas fez com que a aula não ficasse monótona e os alunos se sentissem mais motivados e interessados a participar das atividades propostas.

7. **Encontro 3**

7.1 **Plano de aula**

Plano de aula – terceiro encontro – 22/10/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Funções e interpretação de gráficos.

Objetivo geral: Compreender os conceitos de funções e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos:

- Construir a ideia de função através da dinâmica;
- Determinar o domínio, contradomínio, imagem e gráfico de uma função;
- Identificar o gráfico de uma função;
- Relacionar as variáveis de uma função a partir de uma expressão algébrica.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, barbante, palitos de fósforo e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Para iniciar o encontro, dividir a turma em dois grupos, com o mesmo número de alunos, para realizar uma dinâmica com o objetivo de conceituar domínio, contradomínio e imagem. O primeiro grupo será o conjunto de partida A (conhecido como domínio) e o segundo, o conjunto de chegada B (conhecido como contradomínio).

Entregar um fio de barbante para cada integrante do conjunto A e ele deverá se relacionar, voluntariamente, com um dos elementos do conjunto B de A possui um único correspondente em B, portanto, se trata de uma função.

Nesse momento, questionaremos os alunos: ‘’e se por acaso soltarmos um barbante de A e ele não tiver correspondente nenhum em B, será que ele ainda seria uma função? E se um elemento de A possuir dois correspondentes em B? E se algum elemento de B possuir dois barbantes de dois A diferentes?’’.

Posteriormente, perguntaremos aos alunos se eles se lembram de alguma função afim presente na dinâmica da aula anterior. Com essa função, esboçaremos de modo coletivo seu gráfico no quadro com o intuito de retomar que o coeficiente a de x é também chamado de coeficiente angular, e que representa a inclinação da reta em relação ao eixo Ox, e o termo constante b é chamado de coeficiente linear e representa o ponto onde a reta corta o eixo Oy. Analisaremos também o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função, de modo a concluir que o domínio de uma função afim é o conjunto dos reais (R) e, por isso, seu gráfico descreve uma reta.

A próxima tarefa deve ser realizada em duplas. Cada dupla receberá alguns palitos de fósforo para que construam triângulos, como os da imagem abaixo, e a atividade: "Palitos, regularidades e funções". Os alunos devem tentar resolvê-la e, depois, acompanhar a correção das estagiárias.

Para o fechamento, será entregue aos alunos uma lista de exercícios do Enem abordando os temas vistos no encontro.

Verificação de aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas dinâmicas, atividades propostas, resolução dos exercícios da lista e respostas da atividade dos palitos.

Referências:

BONGIOVANI, Vincenzo; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e vida.** 7ª série. São Paulo: Ática, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática.** 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patricia Moreno. **Vontade de saber Matemática.** 8º ano. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática:** ideias e desafios. 8ª série. 14. ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

PESTANA, Lourival. Uma Proposta Dinâmica para o Ensino da Função Afim a partir da Resolução de Problemas. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os desafios da escola pública paranaense na**

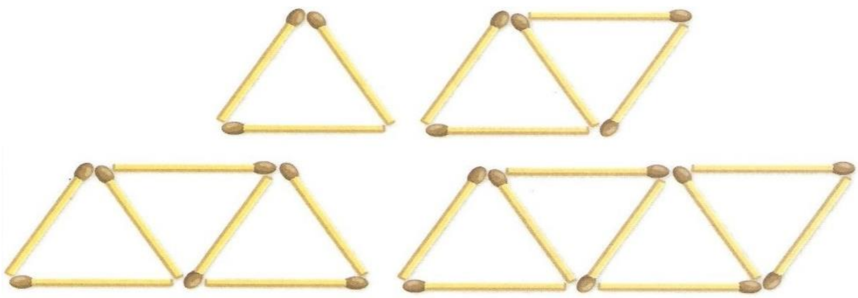
perspectiva do professor PDE: produção didático-pedagógica, 2014. Curitiba: SEED/PR., 2014. v.2. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unespar-paranavai_mat_pdp_lourival_pestana.pdf. Acesso em: 18 out 2022.

7.2 **Material entregue aos alunos**

Quadro 14 – Atividade dos palitos

ATIVIDADE – Palitos, regularidades e funções

Em grupo, construam triângulos com os palitos recebidos, como estes das figuras abaixo:



Fonte: Dante, Luiz Roberto (2012)

Nomes: ____

1- Em seguida, completem o quadro:

Número de triângulos	**Número de palitos**
1	3
2	
3	
4	
10	
15	

2- Quantos palitos serão necessários para a construção de 5 triângulos? R:_____

3- E para a construção de 6 triângulos? R: ________

4- Montem os triângulos e verfiquem se as respostas acima coencidem.

5- Pode-se dizer que o número de palitos depende do número de triângulos?
R: ____

6- Qual a relação entre o número de palitos e o número de triângulos construídos?
R: ____

7- Essa relação é uma função? Se sim, qual seu domínio e sua imagem?

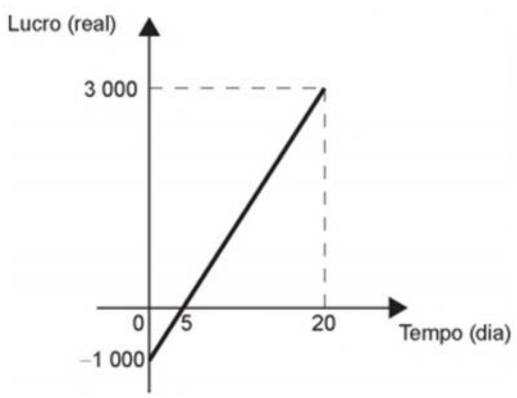
R: ____

Fonte: Pestana (2014)

Lista de exercícios

1. (Enem 2017) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

Figura 19 – Lucro dos eletrônicos



Fonte: Enem 2017

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é:

a) L(t) = 20t + 3 000

b) L(t) = 20t + 4 000

c) L(t) = 200t

d) L(t) = 200t – 1 000

e) L(t) = 200t + 3 000

2. (Enem 2010) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra. A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é:

a) $f(x)$ = $3x$

b) $f(x)$ = 24

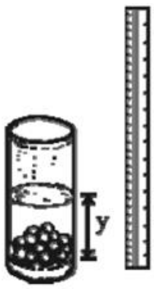
c) $f(x)$ = 27y=10x+500

d) $f(x)$ = $3x$ + 24

e) $f(x)$ = $24x$ + 3

3. (Enem 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

Figura 20 – Copo de água



Fonte: Enem 2009

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Figura 21 –Tabela

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Fonte: Enem 2009

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) y = 30x.

b) y = 25x + 20,2.

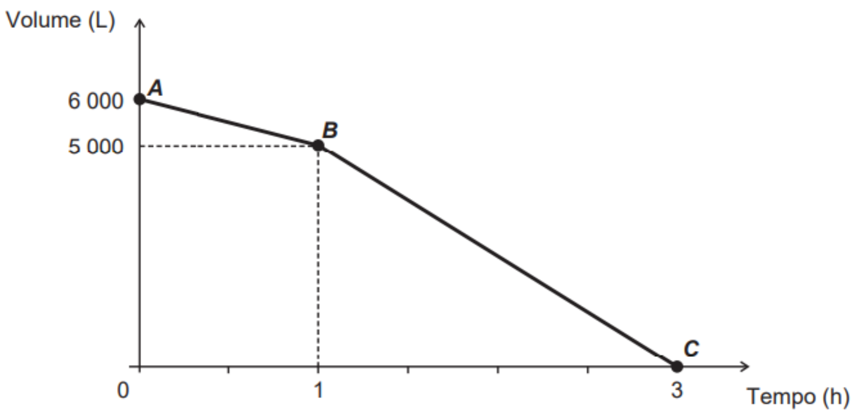
c) y = 1,27x.

d) y = 0,7x.

e) y = 0,07x + 6.

4. (Enem 2016) Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

Figura 22 – Volume em função do tempo



Fonte: Enem 2016

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1 000

b) 1 250

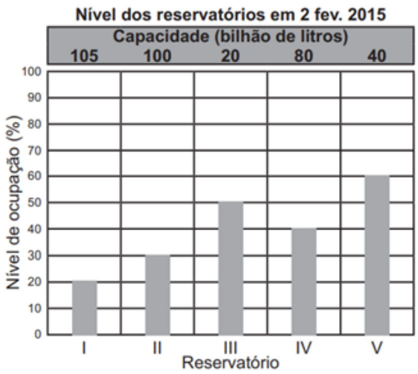
c) 1 500

d) 2 000

e) 2 500

5. (Enem 2021) O gráfico apresenta o nível de ocupação dos cinco reservatórios de água que abasteciam uma cidade em 2 de fevereiro de 2015.

Figura 23 – Reservatórios



Fonte: Enem 2021

Nessa data, o reservatório com o maior volume de água era o:

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

6. (Enem 2021) O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (l).

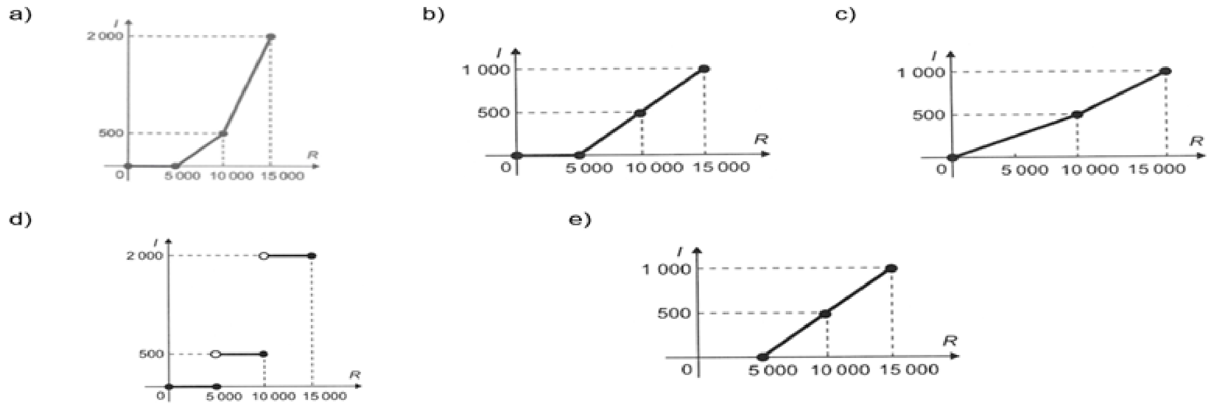
Figura 24 – Preço do produto

Preço do produto (*R*)	**Imposto devido (*I*)**
$R \leq 5\,000$	isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de (R – 5 000)
$10\,000 < R \leq 15\,000$	500 + 30% de (R – 10 000)

Fonte: Enem 2021

O gráfico que melhor representa essa relação é

Figura 25 – Imposto pelo preço

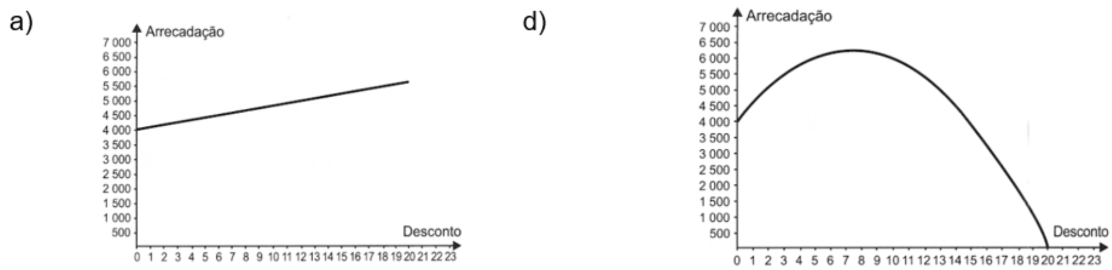


Fonte: Enem 2021

7. (Enem 2021) O administrador de um teatro percebeu que, com o ingresso do evento a R$20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador:

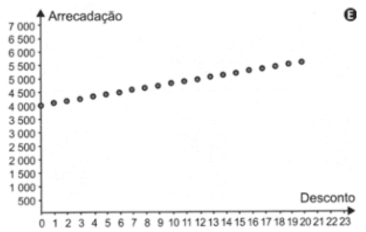
Figura 26 – Arrecadação



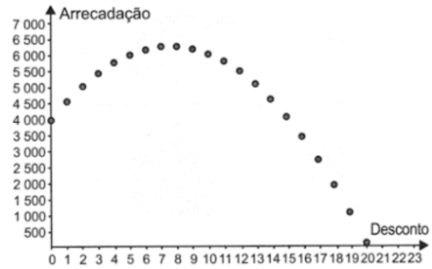
Fonte: Enem 2021

Figura 27 – Arrecadação por desconto

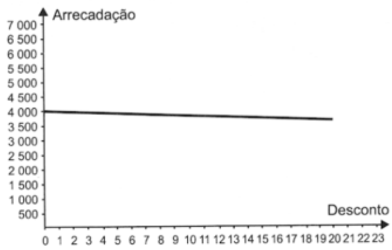
b)



e)



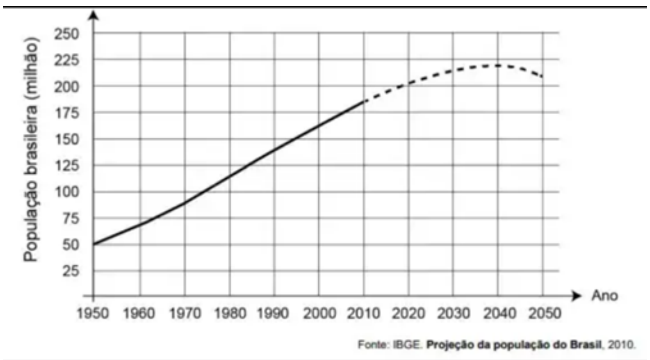
c)



Fonte: Enem 2021

8. (Enem Digital 2020) Prever a dinâmica populacional de um país é de extrema importância, pois com esse conhecimento as políticas públicas em saúde, educação, habitação e infraestrutura poderão ser executadas sem atraso e de forma eficiente. A linha cheia no gráfico mostra a evolução da população brasileira desde 1950 até 2010, e a extrapolação (previsão) até o ano 2050, representada pela linha tracejada, foi feita com base nos censos demográficos realizados até 2010.

Figura 28 – População brasileira



Fonte: Enem 2020

Pelo gráfico apresentado, o intervalo em que se observa aumento da população é

a) 1950 a 2010.

b) 1950 a 2040.

c) 1950 a 2050.

d) 2010 a 2040.

e) 2040 a 2050.

9. (Enem 2010) Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas. O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada. Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são:

a) Verde e Preto.

b) Verde e Amarelo.

c) Amarelo e Amarelo.

d) Preto e Preto.

e) Verde e Verde.

7.3 **Resolução dos exercícios**

Resolução da atividade dos palitos

1)

Resolução:

Quadro 15 – Atividade dos palitos

Número de triângulos	**Número de palitos**
1	3
2	5
3	7
4	9
10	21
15	31

Fonte: Elaborado pelas autoras

2)

Resolução: serão necessários 11 palitos.

3)

Resolução: serão necessários 13 palitos.

4) Prática.

5)

Resolução: sim, há uma relação de dependência envolvida.

6)

Resolução: $f(x) = 2x + 1$.

7)

Resolução: $Dom(f) = \mathbb{N} - \{0\}$ $Im(f) = os\ números\ ímpares$.

Lista de exercícios

Exercício 1)

Resolução:

LETRA D

Analisando o gráfico, é possível perceber que ele é uma função do 1º grau, da forma L(t) = at + b.

Note que o gráfico parte do ponto (0, – 1000), ou seja, quando t = 0, L(t) = – 1000, então b = – 1000.

Logo, a função será: L(t) = at – 1000

Agora, para encontrar o valor de a, basta analisar que, quando t = 20, L(t) = 3000.

Substituindo na fórmula, teremos:

$$3000 = 20a - 1000$$

$$3000 + 1000 = 20a$$

$$4000 = 20a$$

$$a = 4000/20$$

$$a = 200$$

Então, a representação algébrica será:

$$L(t) = 200t - 1000$$

Exercício 2)

Resolução:

LETRA D

Sabemos que há um custo fixo de 24 dólares. Além disso, é cobrado por x horas um valor de 3 dólares, sendo x um número real que representa o número de horas extras. Então, podemos descrever essa função como:

$$f(x) = 3x + 24$$

Exercício 3)

Resolução:

LETRA E

O nível de água (y) em função do número de bolas (x) é dado por $y = ax + b$.

Da tabela, podemos dizer que:

Para $x = 5$, $y = 6{,}35$ e para $x = 10$, $y = 6{,}70$.

Com isso, obtemos o sistema de equações abaixo:

$$5a + b = 6{,}35$$

$$10a + b = 6{,}70$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$a = 0{,}07 \text{ e } b = 6$$

Logo, $y = 0{,}07x + 6$

Exercício 4)

Resolução:

LETRA C

Na primeira hora, foram esvaziados 6 000 L – 5 000 L = 1 000 L, ou seja, uma vazão de 1 000 L/h.

Nas duas horas seguintes, foram esvaziados 5 000 L, ou seja, as duas bombas juntas esvaziaram

5 000 L /2 h = 2 500 L/h.

Assim, a segunda bomba ligada tem vazão de 2 500 L/h – 1 000 L/h = 1 500 L/h.

Exercício 5)

Resolução:

LETRA D

Calculando o volume de água em cada reservatório, o maior deles será o que tem maior volume de água: .

Reservatório I: 20% de 105 = 0,2 • 105 = 21 bilhões de litros

Reservatório I: 30% de 100 = 0,3 • 100 = 30 bilhões de litros

Reservatório III: 50% de 20 = 0,5 • 20 = 10 bilhões de litros

Reservatório IV: 40% de 80 = 0,4 • 80 = 32 bilhões de litros

Reservatório V: 60% de 40 = 0,6 • 40 = 24 bilhões de litros

Podemos observar que o reservatório IV tem maior volume de água.

Exercício 6)

Resolução:

LETRA A

Baseado no quadro dado, temos que o imposto (I) está em função do preço (R)

Figura 29 – Imposto resolução

$$I(R) = \begin{cases} 0, & se\ R \leq 5\,000 \\ 10\%\ de\ (R - 5000), & se\ 5\,000 \leq R \leq 10\,000 \\ 500 + 30\%\ de\ (R - 10\,000), & se\ 10\,000 \leq R \leq 15\,000 \end{cases}$$

$$I(R) = \begin{cases} 0, & se\ R \leq 5\,000 \\ 0{,}1R - 500, & se\ 5\,000 \leq R \leq 10\,000 \\ 0{,}3R - 2500, & se\ 10\,000 \leq R \leq 15\,000 \end{cases}$$

Fonte: Descomplica (2021)

O gráfico que representa a função dada é o gráfico da alternativa A.

Exercício 7)

Resolução:

LETRA D

Como a cada redução de 1 real do valor unitário do ingresso aumenta o público em 40 pessoas, temos que a arrecadação R varia com o valor do ingresso conforme a seguinte relação:

$$R(x) = (200 + 40x)\,.\,(20 - x)$$

Logo, realizando o produto, temos que $R(x) = -x^2 + 600x + 4000$. O gráfico dessa função é uma parábola (pois é uma função do segundo grau), sua concavidade é para baixo (já que o coeficiente a é negativo) e a função passa no eixo *y* na altura de *c* = 4000. Atenção: o gráfico deveria ser pontilhado, uma vez que o valor do ingresso é um valor inteiro (não abrindo margem para valores “quebrados”).

Exercício 8)

Resolução:

LETRA B

Observando a curva do gráfico, percebemos que o intervalo em que se observa aumento da população é 1950 a 2040.

Exercício 9)

Resolução:

LETRA A

De acordo com o enunciado, nenhum dos três estacionamentos fraciona a cobrança, ou seja, se o veículo de um cliente permanecer por 10 minutos, por 45 minutos ou por 60 minutos, será cobrado o valor de uma hora completa, sendo assim, observe:

Analisando os dados, percebe-se que os estacionamentos que melhor atendem os dois irmãos são, respectivamente o Verde e o Preto.

7.4 **Relatório**

Relatório do encontro 3 - 22/10/2022

No dia 22 de outubro de 2022, às 8:10 da manhã, iniciamos o terceiro encontro do Promat na sala A219.

Primeiramente, perguntamos aos alunos se possuíam dúvidas com relação à lista de exercícios entregue na aula anterior. Um aluno perguntou sobre os exercícios quatro e nove da lista. Observamos que mais alunos tiveram dificuldades nesses exercícios, portanto, as estagiárias Milena e Júlia os resolveram no quadro. Com isso, conseguimos revisar conceitos já trabalhados anteriormente, como: soma de frações, frações equivalentes e sistemas de equações.

Dando sequência a aula, pedimos para que os alunos se dividissem em duas fileiras, para realizarmos a dinâmica do barbante. Enquanto acontecia a dinâmica, a estagiária Ana registrava na lousa os diagramas de flechas, que representavam cada uma das situações geradas. Nessa dinâmica, os alunos se mostraram muito participativos e dispostos a reproduzir cada uma das situações propostas e observamos que a prática não ficou monótona, pois eles se relacionaram de diversas formas e com diferentes colegas. Por exemplo, em um dos cenários, todos formaram pares com alguém, enquanto em outro, o mesmo aluno segurou quatro barbantes ao mesmo tempo que outro aluno não segurou nenhum.

Seguindo com o encontro, explicamos aos alunos como identificar se era ou não uma função e, com isso, os indagamos sobre qual das situações registradas na lousa se tratava da representação de uma função. No início, os alunos ficaram meio receosos em responder, somente dois alunos se posicionaram, contudo, após a explicação e auxílio das estagiárias, observamos um aumento na participação e uma firmeza maior nas respostas expressas verbalmente. De forma geral, as principais dúvidas que surgiram durante estas indagações foram relacionadas ao conjunto B receber mais de uma flecha ligada aos seus elementos. De forma semelhante, uma das dúvidas foi por sobrarem elementos no conjunto B, sem ter a quem se relacionar no conjunto A. Depois disso, uma aluna questionou a segunda representação, onde todos os elementos do conjunto A tinham representantes em B, porém ela não havia se atentado ao fato que alguns elementos em A se relacionavam com mais de um elemento em B. Todas essas dúvidas foram pertinentes e necessárias para que reforçássemos o conceito de função e para que os alunos construíssem ativamente o conhecimento sobre esse tema.

Para finalizar essa parte da aula e ainda utilizando os diagramas construídos, os alunos foram questionados sobre a diferença entre contradomínio e imagem e demonstraram confusão, porém, um deles conseguiu perceber que a imagem de uma função eram os elementos de B que “possuíam flechas”, isto é, estavam relacionados com alguém. A partir disso, conseguimos conceituar domínio, contradomínio e imagem, coletivamente.

Após esse momento, indagamos se os alunos se lembravam de um exemplo de função afim que havíamos trabalhados na semana anterior. Alguns alunos verbalizaram funções, as quais foram anotadas na lousa. Uma aluna se diferenciou na maneira de expressar a função, sugerindo a função $f(b) = 2b - 1$ Em seguida, realizamos um intervalo para o lanche.

Depois do intervalo, a estagiária Giulia, utilizando a lousa e um dos exemplos apresentados pelos alunos, representou por meio de seus pontos o gráfico da função afim e utilizou ele para revisar conceitos já trabalhados. Quando os alunos foram questionados sobre como encontrar o ponto que o gráfico corta o eixo x uma aluna respondeu que era o ponto onde $f(x)$ valia zero. A estagiária também mostrou graficamente como identificar o domínio e imagem de uma função, reforçando que na função afim tanto o domínio quanto a imagem são o conjunto dos reais.

Para prosseguir com a aula, solicitamos aos alunos que se juntassem em duplas e cada dupla recebeu uma atividade e 31 palitos. De forma geral, nesta atividade, as principais dúvidas surgiram na questão seis e sete. Ficaram confusos sobre como construir os triângulos com os palitos, algumas duplas achavam que podiam construir os triângulos separados e não como indicava na imagem da atividade. Observamos certa dificuldade também em como encontrar a expressão algébrica que indicava a relação de dependência envolvida, isto é, a lei de formação da função, neste caso algumas duplas conseguiram e outras não. Para determinar o domínio e imagem dessa função os alunos tiveram muita dificuldade, a maioria confundiu com o exemplo da reta onde o domínio e a imagem eram os reais e colocou essa resposta. Nenhuma dupla conseguiu acertar inteiramente a questão sete, apenas a imagem. Recolhemos as folhas das atividades para então corrigi-las na lousa.

A estagiária Ana corrigiu as questões de um a cinco e a estagiária Milena as questões seis e sete, coletivamente e anotando na lousa. Durante a explicação, a estagiária Milena questionou, agora oralmente, qual era o domínio dessa função e uma aluna conseguiu identificar que eram os naturais. Porém, um dos alunos percebeu que o zero não estava incluso e, portanto, concluiu-se que o domínio era o conjunto dos naturais sem o zero. Ao questioná-los sobre a imagem, os alunos perceberam que se tratava dos números ímpares a partir do três, mas não sabiam como escrevê-los na simbologia matemática, assim, fizemos no quadro. Após as correções, entregamos a eles uma lista de exercícios do Enem, que não houve tempo para ser realizada no encontro.

Concluímos com essa aula, que utilizar uma dinâmica de maneira organizada, traz resultados extremamente proveitosos para a construção da aprendizagem matemática e que ao considerarmos o conhecimento prévio dos alunos, colaboramos com o alcance deste objetivo.

8. Encontro 4

8.1 Plano de aula

Plano de aula – quarto encontro - 29/10/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Função quadrática.

Objetivo geral: Compreender o conceito de função quadrática e utilizá-lo na resolução de questões.

Objetivos específicos:

- Analisar e reconhecer uma função quadrática a partir da lei de formação e do gráfico;
- Identificar os coeficientes na expressão $ax^2 + bx + c$ associando-os às características do gráfico da função;
- Encontrar as raízes e o vértice de uma função quadrática;
- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, *GeoGebra*, cartelas da dinâmica e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciar a aula entregando aos alunos um exercício sobre função quadrática. Nesse momento, serão abordados conceitos como grau, coeficientes, equações e funções. E, a partir do exercício, serão desenvolvidas maneiras para encontrar as raízes e os vértices da função quadrática.

Posteriormente, será apresentada, no quadro, a lei de formação geral de uma função quadrática: $y = ax^2 + bx + c$ e os alunos serão instruídos a utilizá-la no *GeoGebra* para analisar graficamente o que acontece quando variamos os coeficientes.

Após, serão entregues aos alunos mais dois exercícios do Enem sobre o conteúdo para que sejam resolvidos e corrigidos coletivamente.

Será solicitado aos alunos que se dividam em grupos de quatro pessoas a fim de realizar a dinâmica "*Stop* das funções". Será entregue uma folha sulfite para cada aluno registrar seu raciocínio e três cartelas para cada grupo, todas viradas para baixo. Para iniciar a dinâmica, as estagiárias falarão ''já'' e cada grupo deve desvirar suas cartelas e tentar resolvê-las coletivamente. Quando um grupo terminar deve gritar *"stop''* em voz alta. As estagiárias analisarão as resoluções do grupo e se estiverem corretas, o grupo vence uma rodada. O grupo vencedor de cada rodada ganha um prêmio. Ao final da dinâmica, as folhas serão recolhidas e servirão como uma das ferramentas para avaliar a aprendizagem.

Por fim, os alunos serão questionados em quais cartelas seu grupo teve mais dificuldade e como fizeram para resolvê-la. A partir dessas colocações, as estagiárias resolverão algumas cartelas no quadro e farão o fechamento do conteúdo.

Verificação da aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas atividades propostas, resolução dos exercícios e anotações da dinâmica.

Referências:

BOLZAN, Alexandre Gallina. **O ensino de função quadrática através da metodologia de resolução de problemas.** 2014. 140 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul, 2014.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar,** 1: Conjuntos e funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

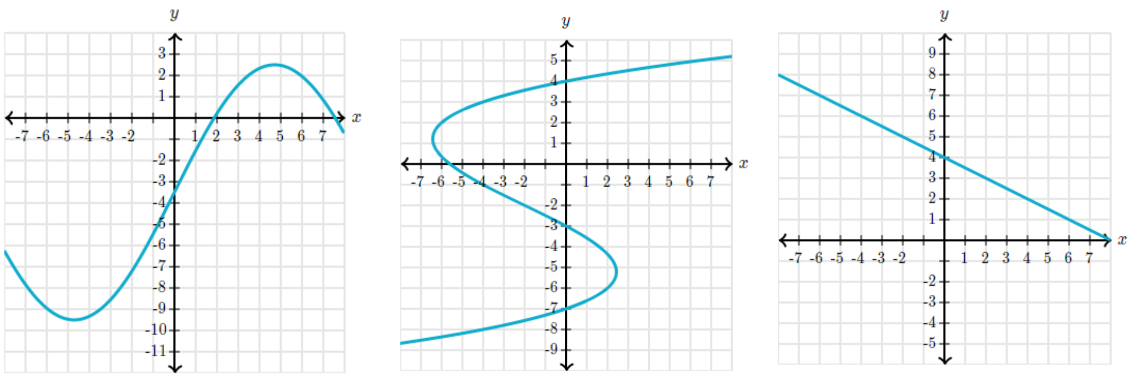
LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a matemática.** 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MODERNA (Org.). **Matemática: Construção e significado.** São Paulo: Moderna, 2005.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **Função no Enem.** [S. l.]. Disponível em: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/funcao-no-enem.htm. Acesso em: 27 out. 2022.

Apêndices

Quadro 16 – Cartelas

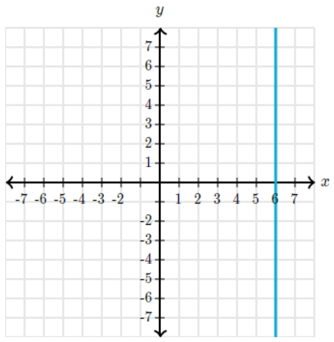
Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$
Quais desses gráficos representam funções? 

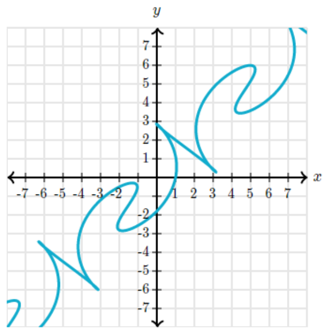
Qual o domínio e a imagem da função $y = x^2 - 16$?

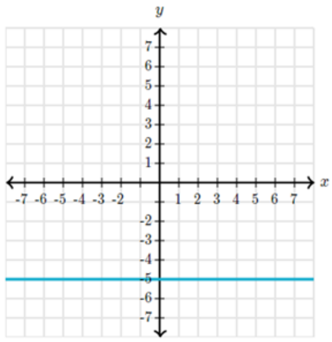
Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 17 – Cartelas stop

Encontre os zeros da função $y = x^2 - 6x + 9$
Quais desses gráficos representam funções?







Encontre o vértice da parábola

$$y = 2x^2 - 50$$

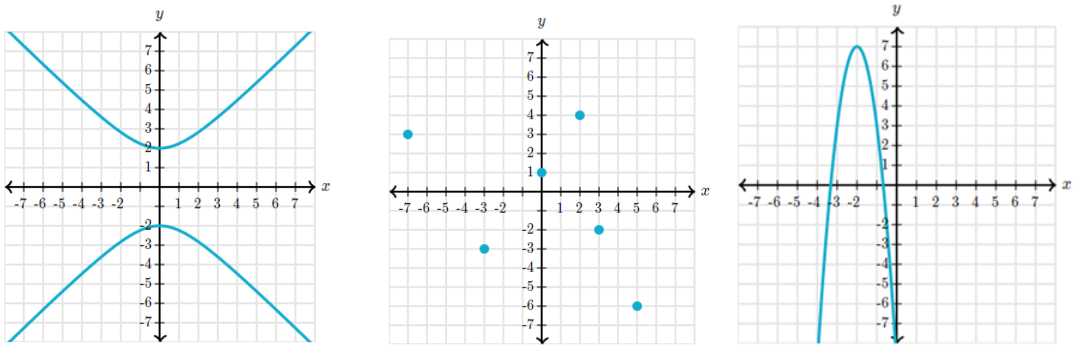
Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 18 – Cartelas do stop

Encontre onde a função

$f(x) = x^2 - 3x - 10$ toca o eixo x

Quais desses gráficos representam funções?

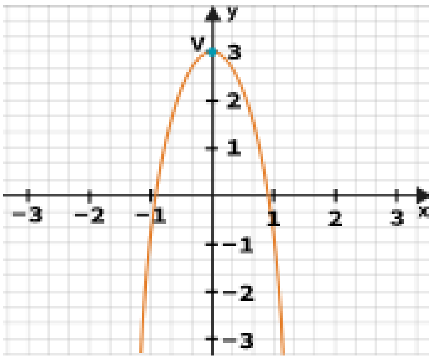


A parábola $f(x) = 2x^2 - 8$ tem ponto de máximo ou de mínimo?

Esboce seu gráfico.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 19 – Cartelas stop das funções

Seja a função $y = x^2 + 8x - 9$. O que podemos concluir a partir de seus coeficientes?
Qual a lei de formação da função que tem o gráfico a seguir 
A parábola $-x^2 + 10x - 25$ tem ponto de máximo ou de mínimo? Encontre o vértice.

Fonte: Elaborado pelas autoras

8.2 **Material entregue aos alunos**

Exercício 1

Numa empresa que produziu x unidades de um produto, verificou-se que a receita podia ser estimada com a fórmula $R(x) = 8000x - x$^2, e que o custo de produção era dado por $C(x) = x$^2 – $3000x + 500$.

a) Determine o número de unidades que devem ser produzidas para que o lucro seja máximo.

b) Para quantas unidades produzidas o lucro é igual a zero?

c) Esboce o gráfico da função do lucro dessa empresa em função das unidades produzidas deste produto.

Exercício 2

(Enem 2019) No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade Q de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo t. Esses pesquisadores controlam o processo, observando que Q é uma função quadrática de t. Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

Figura 30 – Quantidade da substância

t (hora)	0	1	2
Q (miligrama)	1	4	6

Fonte: Enem 2019

Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que circulará na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.

Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a

a) 4.

b) 7.

c) 8.

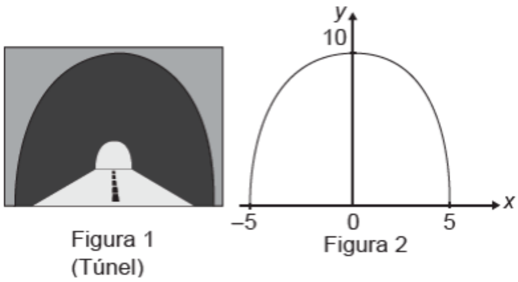
d) 9.

e) 10.

Exercício 3

(Enem 2017) Suponha que para um trem trafegar de uma cidade à outra seja necessária a construção de um túnel com altura e largura iguais a $10\ m$. Por questões relacionadas ao tipo de solo a ser escavado, o túnel deverá ser tal que qualquer seção transversal seja o arco de uma determinada parábola, como apresentado na Figura 1. Deseja-se saber qual a equação da parábola que contém esse arco. Considere um plano cartesiano com centro no ponto médio da base da abertura do túnel, conforme Figura 2

Figura 31 – Parábola



Fonte: Enem 2017

A equação que descreve a parábola é

a) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

b) $y = \frac{2}{5}x^2 + 10$

c) $y = -x^2 + 10$

d) $y = x^2 - 25$

e) $y = -x^2 + 25$

8.3 **Resolução dos exercícios**

Cartelas do ‘’*Stop* das funções’’

<u>Rodada 1:</u> Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Resposta: $x' = 4\ e\ x'' = 2$.

Resposta dos gráficos: função, não função, função.

Qual o domínio e a imagem da função $y = x^2 - 16$?

Resposta: Domínio: $\mathbb{R}$. Imagem: $[-16, \infty)$.

<u>Rodada 2:</u> Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Resposta: $x' = x'' = 3$.

Resposta dos gráficos: não função, não função, função.

Encontre o vértice da parábola $y = 2x^2 - 50$

Resposta: $Vértice = \ (0, -50)$, $x_v = 0 \ e \ y_v = 50$.

<u>Rodada 3:</u> Encontre onde a função $f(x) = x^2 - 3x - 10$ toca o eixo x

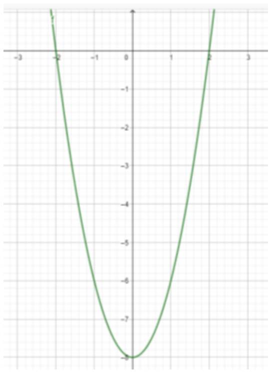
Resposta: $x' = 5 \ e \ x'' = -2$.

Resposta dos gráficos: não função, função, função.

A parábola $f(x) = 2x^2 - 8$ tem ponto de máximo ou de mínimo? Esboce seu gráfico.

Resposta: Como $a > 0$, a parábola tem concavidade virada para cima e logo, ponto de mínimo. Esboço: corta o eixo x no -2 e 2 e corta o y no -8.

Figura 32 – Esboço do gráfico



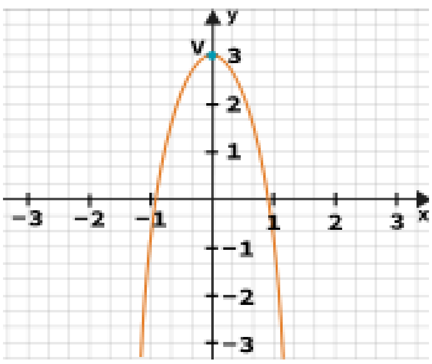
Fonte: Elaborado pelas autoras

<u>Rodada 4:</u> Seja a função $y = x^2 + 8x - 9$. O que podemos concluir a partir de seus coeficientes?

Resposta: Pelo coeficiente $a > 0$ concluímos que é uma parábola virada para cima com ponto de mínimo. Pelo coeficiente $b > 0$ concluímos que o vértice vai estar à esquerda do eixo y. E pelo coeficiente c concluímos que a parábola vai interceptar o eixo y no ponto -9.

Qual a lei de formação da função que tem o gráfico a seguir

Figura 33 – Gráfico da quadrática



Fonte: Elaborado pelas autoras

Resposta: $f(x) = 3x^2 + 3$.

A parábola $-x^2 + 10x - 25$ tem ponto de máximo ou de mínimo? Encontre o vértice.

Resposta: Como $a < 0$, a parábola tem concavidade virada para baixo e logo, ponto de máximo. O $Vértice = (5{,}0)$, $x_v = 5 \; e \; y_v = 0$.

Exercício 1

Resolução:

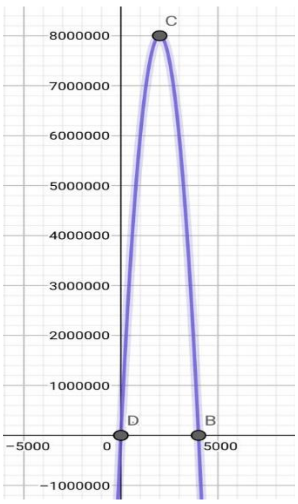
a) $L(x) = R(x) - C(x)$. Logo $L(x) = -2x^2 + 8.000x$. Como o coeficiente $a < 0$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo e, portanto, ponto de máximo.

Queremos então achar o valor de x que nos fornece o lucro máximo, isto é, a coordenada x do vértice, $xv = \frac{-b}{2a} = \frac{-8000}{2.-2} = 2.000$ unidades.

b) Basta tomarmos $L(x) = 0$, assim $-2x^2 + 8000x = 0$, resolvendo por Bhaskara ou fatoração temos que $x' = 0$ e $x'' = 4.000$. Logo, o lucro é zero para 0 e 4.000 unidades produzidas.

c) O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, corta o eixo y no $(0{,}0)$ pois não tem coeficiente c, corta o eixo x no $(0{,}0)$ e $(4000{,}0)$ e seu vértice é $(2.000{,}8.000.000)$.

Figura 34 – Parábola



Fonte: Elaborado pelas autoras

Exercício 2

Resolução:

LETRA B.

Do enunciado, a função $Q(t)$ é quadrática, sendo assim, ela tem o formato $Q(t) = a.t^2 + b.t + c$. Como temos 3 pontos do gráfico dessa função, $(0,1)$, $(1,4)$, $(2,6)$, podemos encontrar os coeficientes a,b e c desta parábola.

Ponto $(0,1)$

$$Q(0) = a.0^2 + b.0 + c = 1$$
$$\Rightarrow c = 1$$

Ponto $(1,4)$

Assim,

$$Q(1) = a.1^2 + b.1 + c = 4$$

Aplicando $c = 1$:

$$a + b + 1 = 4$$
$$\Rightarrow a + b = 3$$

Ponto $(2,6)$

$$Q(2) = a.2^2 + b.2 + c = 6$$
$$4a + 2b + 1 = 6$$
$$4a + 2b = 5$$

Ficamos com o seguinte sistema linear:

$a + b = 3$ (Equação I)

$4a + 2b = 5$ (Equação II)

Multiplicando a equação (I) por -2 e somando com a equação (II)

$$4a - 2a + 2b - 2b = 5 - 6$$
$$2a = -1$$
$$a = -1/2$$

Aplicando $(a = -1/2)$ na equação (I)

$$-1/2 + b = 3$$
$$b = 7/2$$

Sendo assim, $Q(t) = \left(-\frac{1}{2}\right) * t^2 + \left(\frac{7}{2}\right) * t + 1$

Agora temos que responder: "os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que circulará na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado. "

O último tempo coletado foi o $(t = 2)$, então temos que calcular $Q(t = 3)$.

$$Q(3) = \left(-\frac{1}{2}\right) * 3^2 + \left(\frac{7}{2}\right) * 3 + 1$$

$$\Rightarrow Q(3) = \left(-\frac{1}{2}\right) * 9 + \left(\frac{21}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow Q(3) = \left(-\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{21}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow Q(3) = \left(\frac{12}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow Q(3) = 6 + 1$$

$$\Rightarrow Q(3) = 7.$$

Exercício 3

Resolução:

LETRA A.

Temos que encontrar a equação que descreve a parábola da segunda figura. Lembrando que uma equação do segundo grau possui a seguinte forma:

$y = ax^2 + bx + c$

Como a concavidade da parábola é para baixo, então o coeficiente "a" é negativo. Então, podemos eliminar as alternativas $b)$ e $c)$

Na equação do segundo grau temos duas propriedades importantes chamadas Soma e Produto das raízes.

Temos que a soma é igual a $S = x' + x" = \frac{-b}{a}$ e o produto é igual a $P = x' * x" = \frac{c}{a}$.

Da figura 2 temos que $x' = -5$ e $x'' = 5$. E temos também que $c = 10$. Logo.

$$S = -5 + 5 = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$P = -5.5 = -25 \Rightarrow \frac{c}{a} = -25 \Rightarrow \frac{10}{a} = -25 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$$

Portanto, a equação que descreve a parábola da figura 2 é $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$.

8.4 **Relatório**

Relatório do encontro 4 – 29/10/2022

No dia 29 de outubro de 2022, às 8:15 da manhã, realizamos o quarto encontro do Promat no Laboratório de Ensino da Matemática (LEM), devido a impossibilidade de usar a sala A219, dado a sua utilização para as eleições.

Inicialmente, concedemos um tempo para que os alunos resolvessem e tirassem dúvidas em relação à lista de exercícios entregue na aula anterior, como combinado em sala. Surgiram dúvidas nas questões um, três e cinco. Além disso, um aluno perguntou sobre uma das questões resolvidas na aula anterior, a respeito de sistema de equações. Como vários alunos esboçaram dificuldade na questão três, a estagiária Stephany a resolveu no quadro pelo método da substituição. Dessa maneira, conseguimos recapitular conceitos já trabalhos anteriormente, como função afim e sistema de equações.

Dando sequência a aula, entregamos aos alunos um exercício de função polinomial do segundo grau, com o objetivo de introduzir o conteúdo. Ao serem questionados sobre qual tipo de função estava envolvida na atividade, e como se comportava seu gráfico, uma aluna respondeu que a função era uma quadrática e outro aluno respondeu que o gráfico formava um “U’’, podendo ser para cima ou para baixo. A partir das respostas, formalizamos que essa curva é uma parábola e a estagiária Giulia resolveu a primeira parte do exercício no quadro, com a participação da turma. Nesse momento, uma das alunas questionou se havia outra forma de encontrar a primeira coordenada do vértice sem ser pela fórmula e foi explicado que sim, por meio da média aritmética das raízes.

A estagiária Julia solucionou o restante do exercício no quadro e destacou que encontrar as raízes, os zeros ou os pontos em que a função intercepta o eixo x são a mesma coisa. Alguns métodos de resolução apresentados foram fatoração, soma e produto e fórmula resolutiva. Após a resolução, definimos grau e o relacionamos com o número de raízes. Também apresentamos a relação entre o incremento e o número de raízes reais.

Posteriormente, escrevemos no quadro a lei de formação geral de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ e solicitamos que os alunos a utilizassem no *GeoGebra* para analisar graficamente o que acontece quando variamos os coeficientes. Neste instante, realizamos um intervalo para o lanche.

Após o intervalo, questionamos os alunos sobre o que perceberam e recebemos um bom retorno. A maior parte da turma conseguiu observar e concluir que o coeficiente “a” indica a abertura da parábola e o coeficiente “c” indica o ponto onde gráfico intercepta o eixo y. Porém ficaram em dúvida no que indicava o coeficiente b.

Seguindo com a aula, entregamos mais um exercício para os alunos, agora do Enem, com o intuito de aplicar o conteúdo trabalhado. A estagiária Ana o resolveu no quadro, com a participação da turma. Durante a resolução, um aluno perguntou como identificar que o coeficiente b era zero e outra aluna questionou como era o gráfico de uma função exponencial.

Para a próxima tarefa, dividimos os alunos em dois grupos de quatro e um de cinco integrantes a fim de realizar a dinâmica “*Stop* das funções”. Cada grupo recebeu uma folha sulfite para registro das resoluções e três cartelas, todas viradas para baixo. Explicamos a proposta e iniciamos a dinâmica. Ao todo, foram realizadas quatro rodadas e, ao final de cada uma, anotamos as respostas no quadro. Resolvemos no quadro as cartelas que geraram mais dúvidas.

Na primeira rodada, a maior dificuldade dos alunos foi encontrar o domínio e imagem da função $y = x^2 - 16$. As primeiras soluções dos grupos que falaram *stop* estavam incorretas. Um dos grupos não encontrou corretamente as raízes. enquanto outro não encontrou o domínio e a imagem. Após certo tempo e com auxílio, um dos grupos chegou à solução correta. Na segunda rodada, dois grupos falaram *stop* ao mesmo tempo, mas ambas as soluções estavam incorretas, portanto, o jogo prosseguiu até que um deles gritasse *stop* novamente. Nesse momento, a maior dificuldade dos grupos foi perceber que a reta vertical não é o gráfico de uma função e encontrar o vértice da função $y = 2x^2 - 50$.

A terceira rodada foi muito rápida, o vencedor foi o grupo que ainda não havia vencido. Todos os grupos identificaram corretamente quais gráficos representavam funções, mas não tiveram tempo de encontrar onde o gráfico da função $y = x^2 - 3x -$

10 interceptava o eixo x, pois o grupo vencedor finalizou rapidamente. A quarta e última rodada foi a mais complicada para os alunos. Os grupos resolveram duas das cartelas com certa facilidade, porém a que precisavam encontrar a lei de formação da função quadrática a partir do gráfico gerou muitas dúvidas. Tal questão envolvia a análise dos coeficientes e substituição de um ponto. Com auxílio, um dos grupos conseguiu chegar à solução correta.

Os alunos se mostraram muito participativos e dispostos a realizar cada uma das atividades propostas na aula, sobretudo a dinâmica. Todos estavam muito empenhados em resolver as cartelas corretamente e terminar primeiro para ganhar o prêmio. Mesmo o grupo que ainda não haviam vencido não desanimou em nenhum momento e permaneceu unido e esperançoso até a última rodada. Como resultado de seu esforço conseguiram vencê-la. O mais interessante de tudo, no entanto, foi percebermos que mesmo quando perdiam, os alunos queriam compreender a resolução das cartelas e era possível ver um explicando para o outro conforme entendiam.

9. **Encontro 5**

9.1 **Plano de aula**

Plano de aula – quinto encontro – 05/11/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Estatística e probabilidade.

Objetivo geral: Compreender os conceitos de estatística e probabilidade a fim de analisar, interpretar e solucionar situações-problemas.

Objetivos específicos:

- Coletar, organizar e analisar dados de gráficos e tabelas;
- Determinar e distinguir a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados;
- Diferenciar e calcular média aritmética simples e média aritmética ponderada;

- Identificar as medidas de dispersão de um conjunto de dados: desvio, amplitude, variância;
- Calcular a probabilidade de um evento;
- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, cartelas e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente, entregar aos alunos um exercício introdutório sobre Estatística para ser resolvido coletivamente.

Nesse momento, serão abordados conceitos como média, moda e mediana, além de exemplificar em quais casos utilizamos a média aritmética simples e a ponderada. Também serão analisadas e conceituadas oralmente as medidas de dispersão: desvio, amplitude e variância. Na sequência, entregar aos alunos uma lista de exercícios do Enem sobre o conteúdo e deixar um tempo para que a resolvam.

Posteriormente, dividir os alunos em grupos de quatro integrantes e entregar uma cartela para cada grupo, a fim de realizar a dinâmica ‘’corrida dos cavalos’’ (Anexo 1). Para iniciar a dinâmica, cada aluno deve escolher dois cavalos para ‘’apostar’’, de modo que cada número na cartela equivale a um cavalo, e jogar dois dados ao mesmo tempo. O aluno avança se a soma dos números tirados nos dois dados for equivalente ao número do cavalo apostado. Vence quem atingir a linha de chegada primeiro.

Após a dinâmica, analisar coletivamente os resultados obtidos na dinâmica, a fim de definir probabilidade e fatorial. A partir disso, entregar uma atividade com perguntas sobre a dinâmica para os grupos responderem. Após a resolução dos alunos, corrigir as questões com a participação da turma.

Verificação da aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas atividades propostas, resolução dos exercícios e respostas da dinâmica.

Referências:

ANDRADE, A. L. S. D. **O ensino de probabilidade com alunos do 9º ano do ensino fundamental: contribuições do jogo "Corrida de Cavalos" na perspectiva da resolução de problemas**. TCC – Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, p. 63. 2019.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**, 8ª série. 2 ed. São Paulo: Ática, 2008.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar**, Volume 5. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar**, Volume 11. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a matemática**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Apêndices

Tabuleiro da corrida dos cavalos

Quadro 20 – Tabuleiro corrida de cavalos

CHEGADA													

LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
APOSTAS/NOMES													

Fonte: Elaborado pelas autoras

9.2 **Material entregue aos alunos**

Exercício introdutório

(Enem 2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Quadro 21 – Gols por partida

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Fonte: Enem 2010

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda dessa distribuição, então

a) $X = Y < Z$.

b) $Z < X = Y$.

c) $Y < Z < X$.

d) $Z < X < Y$.

e) $Z < Y < X$.

Lista de exercícios

1. (Enem 2019) O quadro apresenta a quantidade de um tipo de pão vendido em uma semana em uma padaria.

Figura 35 – Pães

Dia da semana	Número de pães vendidos
Domingo	250
Segunda-feira	208
Terça-feira	215
Quarta-feira	251
Quinta-feira	187
Sexta-feira	187
Sábado	186

Fonte: Enem 2019

O dono da padaria decidiu que, na semana seguinte, a produção diária desse tipo de pão seria igual ao número de pães vendidos no dia da semana em que tal quantidade foi a mais próxima da média das quantidades vendidas na semana.

O dia da semana utilizado como referência para a quantidade de pães a serem produzidos diariamente foi

A) domingo.

B) segunda-feira.

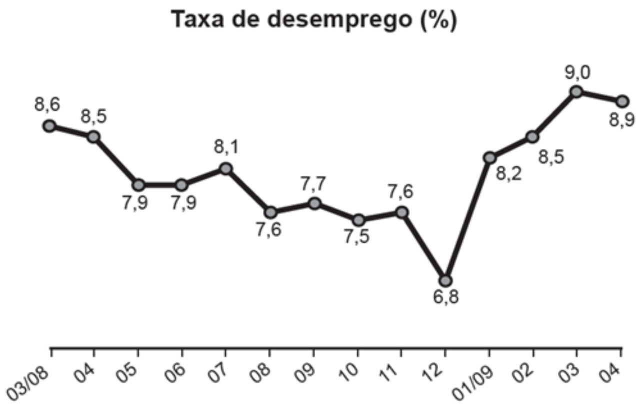
C) terça-feira.

D) quarta-feira.

E) sábado.

2. (Enem 2017) O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Figura 36 – Taxa de desemprego



Fonte: Enem 2017

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

A) 8,1%. B) 8,0%. C) 7,9%. D) 7,7%. E) 7,6%.

3. (Enem 2016) Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Figura 37 – Elevador

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Fonte: Enem 2016

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. (Enem 2016) Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

Quadro 22 – Vacinas

1º mês: 21;	2º mês: 22;	3º mês: 25;	4º mês: 31;	5º mês: 21.

Fonte: Enem 2016

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é

A) 156.

B) 180.

C) 192.

D) 264.

E) 288.

5. (Enem 2009) Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências:

Figura 38 – Frequência do dado

NÚMERO OBTIDO	FREQUÊNCIA
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

Fonte: Enem 2009

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequência são, respectivamente:

A) 3, 2 e 1 B) 3, 3 e 1 C) 3, 4 e 2 D) 5, 4 e 2 E) 6, 2 e 4

6. (Enem 2020) O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Figura 39 – Idade

Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloisa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

Fonte: Enem 2020

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

7. (Enem 2019) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

A) 0,0500

B) 0,1000

C) 0,1125

D) 0,3125

E) 0,5000

8. (Enem PPL 2020) Em uma campanha promocional de uma loja, um cliente gira uma roleta, conforme a apresentada no esquema, almejando obter um desconto sobre o valor total de sua compra. O resultado é o que está marcado na região apontada pela seta, sendo que todas as regiões são congruentes. Além disso, um dispositivo impede

que a seta venha a apontar exatamente para a linha de fronteira entre duas regiões adjacentes. Um cliente realiza uma compra e gira a roleta, torcendo para obter o desconto máximo.

Figura 40 – Roleta de desconto

Fonte: Enem 2020

A probabilidade, em porcentagem, de esse cliente ganhar o desconto máximo com um único giro da roleta é melhor aproximada por

A) 8,3.

B) 10,0.

C) 12,5.

D) 16,6.

E) 50,0

9. (Enem 2020) Amigo secreto é uma brincadeira tradicional nas festas de fim de ano. Um grupo de amigos se reúne e cada um deles sorteia o nome da pessoa que irá presentear. No dia da troca de presentes, uma primeira pessoa presenteia seu amigo secreto. Em seguida, o presenteado revela seu amigo secreto e o presenteia. A brincadeira continua até que todos sejam presenteados, mesmo no caso em que o ciclo se fecha. Dez funcionários de uma empresa, entre eles um casal, participarão de um amigo secreto. A primeira pessoa a revelar será definida por sorteio. Qual é a probabilidade de que a primeira pessoa a revelar o seu amigo secreto e a última presenteada sejam as duas pessoas do casal?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{45}$

C) $\frac{1}{50}$

D) $\frac{1}{90}$

E) $\frac{1}{100}$

Atividade da corrida dos cavalos

Corrida de cavalos atividade

1. Após o jogo e em grupo, respondam:

a) Qual cavalo venceu a(s) rodada(s)?

b) Há algum cavalo que tem mais ou menos chance que o outro de vencer? Justifique sua resposta.

2. Construam a tabela de possibilidades da soma de dois dados.

3. A partir da tabela construída, o que podemos concluir sobre as possibilidades? Quais são as somas menos e mais prováveis?

4. Qual a probabilidade, no lançamento de dois dados, de se obter:

a) Soma igual a 7?

b) Soma igual a 11?

c) Soma par?

d) Soma maior que 9?

e) Soma par e maior que 9?

f) Soma par ou maior que 9?

g) Dois números iguais?

9.3 **Resolução dos exercícios**

Exercício introdutório

Resolução:

LETRA E.

X = Média (nesse caso é ponderada pois temos pesos) = $\frac{5.0+3.1+4.2+3.3+2.4+2.5+1.7}{5+3+4+3+2+2+1} = \frac{45}{20}$ $= \frac{22,5}{10}$ = 2,25.

Y = Mediana = 2 (média aritmética dos dois elementos centrais).

0,0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,4,4,5,5,7

Z = Moda = 0.

Logo, $Z < Y < X$.

Lista de exercícios

Exercício 1)

Resolução:

Alternativa C

Calculando a média, temos que:

$$X = \frac{250 + 208 + 215 + 151 + 187 + 187 + 186}{7} = \frac{1484}{7} = 212$$

Cálculo da média do número de pães vendidos por dia da semana em uma padaria. O valor mais próximo de 212 é encontrado na terça-feira, de 215 pães.

Exercício 2)

Resolução:

Alternativa B

Primeiro colocaremos os dados em ordem e encontraremos os termos centrais:

6,8; 7,5; 7,6; 7,6; 7,7; 7,9**; 7,9; 8,1**; 8,2; 8,5; 8,5; 8,6; 8,9; 9,0.

Calculando a média entre esses valores, (7,9 + 8,1) : 2 = 16 : 2 = 8.

Exercício 3)

Resolução:

Alternativa D

Vejamos o número de pessoas em cada andar:

Térreo: 4 pessoas

1º andar: 4 + 4 – 3 = 5 pessoas

2º andar: 5 + 1 – 1 = 5 pessoas

3º andar: 5 + 2 – 2 = 5 pessoas

4º andar: 5 + 2 – 0 = 7 pessoas

5º andar: 7 + 2 – 6 = 3 pessoas

A moda da quantidade de pessoas é 5.

Exercício 4)

Resolução:

Alternativa B

O total de vacinas aplicadas foi igual a:

21 + 22 + 25 + 31 + 21 = 120

Restou um total de 228 – 120 = 108 vacinas.

A média de vacinas mensal é igual a 120 : 5 = 24 vacinas/mês. Como queremos 12 vezes a média dos 5 primeiros meses, será o total de 12 · 24 = 288 vacinas, então, é necessário adquirir um total de 288 – 108 = 180 vacinas.

Exercício 5)

Resolução:

Alternativa B

Calculando a média, temos que:

$$X = \frac{1\,.\,4 + 2\,.\,1 + 4\,.\,2 + 5\,.\,2 + 6\,.\,1}{10} \Rightarrow X = \frac{4 + 2 + 8 + 10 + 6}{10} \Rightarrow X = 3$$

Cálculo de média do número obtido e frequência de ocorrência ao jogar um dado por 10 vezes consecutivas.

A mediana é a média dos dois termos centrais, que são o 5º e 6º valores. Analisando os resultados e as suas frequências, o 5º valor é 2 e o 6º é 4, então, (2 + 4): 2 = 3.

Mediana = 3

Por fim, a moda é o valor com maior frequência, que, no caso, é o 1, então, a média, a mediana e a moda são, respectivamente, 3, 3 e 1.

Exercício 6)

Resolução:

Alternativa E

A questão diz que em subgrupos de pessoas da mesma idade, a ordem é decidida por sorteio. Temos que o João está no subgrupo dos 75 anos, onde possuem outros 3 idosos. A sétima pessoa da lista, será tirada desse subgrupo. Como será feito sorteio, a probabilidade terá 1 caso favorável (João ser sorteado) e 4 casos possíveis (João, Heloisa, Marisa e Pedro). Logo a probabilidade é dada por $\frac{1}{4}$.

Exercício 7)

Resolução:

Alternativa E

$$P = \frac{0{,}25\ .\ 0{,}20}{0{,}25\,.\,0{,}20 + 0{,}0625\,.\,0{,}80} = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}05} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Exercício 8)

Resolução:

Alternativa A

O exercício quer saber “A probabilidade, em porcentagem, de esse cliente ganhar o desconto máximo com um único giro da roleta é mais bem aproximada por “.

Analisando a figura percebemos que o máximo desconto é o de 10%.

Para calcularmos uma probabilidade temos que probabilidade é dado por:

$$P = \frac{q}{t}$$

Onde q são os casos que nós queremos e t são os casos totais.

O caso que nós queremos é justamente o do desconto máximo, então no caso é 1.

Os casos totais são todos os pontos onde a roleta pode parar, que no caso são 12 casas.

Sendo assim a probabilidade é:

$$P = \frac{q}{t} = \frac{1}{12} = 0{,}08333$$

Para saber em porcentagem basta multiplicar por 100

$$0{,}08333 * 100 = 8{,}33\%$$

Logo a resposta é a alternativa A, 8,3.

Exercício 9)

Resolução:

$$Probabilidade = \frac{2!\,.\,8!}{10!} \Longrightarrow \frac{1}{45}.$$

Atividade dos cavalos

1) Pessoal.

2)

Resolução:

Figura 41 – Soma de dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: Andrade (2019)

3)

Resolução:

Existe uma probabilidade maior ou menor de determinado cavalo vencer. Menos prováveis: 1 e 13. Mais provável: 7.

4)

Resolução:

a) $\frac{1}{6}$.

b) $\frac{1}{18}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{1}{6}$.

e) $\frac{1}{9}$.

f) $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

g) $\frac{1}{6}$.

9.4 **Relatório**

Relatório do encontro 5 – 05/11/2022

No dia 05 de novembro de 2022, às 8:10 da manhã, realizamos o quinto encontro do Promat na sala A219.

Inicialmente, entregamos um exercício para que os alunos lessem e interpretassem o problema com o objetivo de introduzir o conteúdo. Ao serem questionados sobre como o resolveriam, uma aluna disse que somaria os elementos e dividiria pelo número total de elementos e outra disse para calcular a média ponderada. A partir das respostas das alunas, formalizamos os conceitos de média aritmética simples e média aritmética ponderada. No decorrer da resolução do exercício, também foram trabalhados os conceitos de moda e mediana.

Dando sequência a aula, a estagiária Giulia apresentou no quadro os conceitos de amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão com exemplos relacionados ao exercício anterior. Percebemos que poucos alunos já os conheciam. Depois de apresentar todos os conceitos relacionados à estatística, mencionamos a diferença entre as medidas centrais (média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda) e medidas de dispersão (amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão). Neste momento, alguns alunos apresentaram dúvidas sobre a mediana de um intervalo e sobre a possível existência de duas ou mais modas.

Posteriormente, entregamos a lista de exercícios do Enem e sugerimos que os alunos fizessem grupos para resolvê-la. Foram formados dois grupos de quatro integrantes e três duplas. Além disso, duas alunas optaram por trabalhar sozinhas.

Ao circular pela sala, percebemos que os alunos tiveram dificuldade nas questões três, sete, oito e nove. Na questão três, a dificuldade era em identificar se deveriam determinar a moda ou mediana. Nas questões oito e nove, ao envolver frações e fatorial. Na questão sete, na interpretação das informações. Os demais exercícios foram resolvidos corretamente e sem grandes dificuldades. Neste instante, realizamos um intervalo para o lanche.

Após o intervalo, dividimos os alunos em dois grupos de quatro e dois grupos de três integrantes a fim de realizar a atividade da corrida de cavalos. Cada grupo recebeu uma tabela e dois dados. A estagiária Julia explicou as regras e iniciamos a atividade.

No decorrer do jogo, os alunos demostraram compreender a ideia de probabilidade presente no lançamento dos dados e fizeram anotações sobre as somas que mais se repetiram. Um aluno mencionou que havia visto “na escola, na semana passada” a análise de possibilidades no lançamento de dois dados. Os grupos reiniciaram o jogo e por fim comunicaram quais foram os números dos cavalos vencedores. A partir dos números comunicados os alunos concluíram que o oitavo cavalo tinha mais chances de vencer.

Seguindo com a aula, entregamos algumas questões sobre o jogo para que os alunos refletissem e dialogassem entre o grupo. Ao finalizarem as questões, a atividade foi recolhida e a estagiária Milena iniciou a resolução no quadro com a participação da turma. Quando questionados sobre as conclusões da atividade, um grupo contou que escolheram o número treze e descobriram posteriormente que as possibilidades de ele vencer eram nulas. Outros grupos contaram que isso também aconteceu com o número um. Além disso, mencionaram que os cavalos de número dois e doze tem menos probabilidade de vencer, pois só existe uma combinação de dados possível que some esses valores.

Ainda sobre a atividade da corrida de cavalos, observamos que os grupos realizaram a tabela de possibilidades de diversas maneiras, mas conseguiram atingir a conclusão almejada. Os alunos apresentaram maiores dificuldades na última questão da atividade, relacionada a diferença entre as conjunções “e” e “ou”. Nesse momento, um aluno contou que na matemática o “ou” está relacionado à adição e o “e” está relacionado à multiplicação. Uma aluna perguntou como seria construído o gráfico da tabela de possibilidades e o professor orientador efetuou a distribuição Gaussiana no quadro para a turma.

Durante a aula, os alunos demonstraram interesse em realizar as atividades propostas, principalmente a lista de exercícios. Porém, embora a turma tenha demonstrado entendimento dos conteúdos apresentados, a aula não teve tanto envolvimento e participação quanto esperado e poderia ser ministrada de forma mais dinâmica.

10. **Encontro 6**

10.1 **Plano de aula**

Plano de aula – sexto encontro – 12/11/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Geometria plana.

Objetivo geral: Compreender os conceitos e propriedades geométricas a fim de analisar, interpretar e solucionar situações-problemas.

Objetivos específicos:

- Identificar e diferenciar as figuras geométricas planas;
- Calcular a área e o perímetro de figuras geométricas planas;
- Estimular a criatividade e o raciocínio lógico;

- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, Tangram, régua e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciar a aula relembrando oralmente a definição de área e perímetro e a diferença entre círculo e circunferência. Em seguida, entregar aos alunos uma questão do Enem sobre geometria plana para ser resolvida coletivamente. A resolução do exercício será feita a partir da soma da área de duas figuras planas, o semicírculo e o quadrado.

Seguindo com o encontro, os alunos serão divididos em grupos de quatro integrantes e instruídos para a execução de três atividades com o Tangram. Será entregue um Tangram e uma folha sulfite para cada grupo registrar suas respostas. Para a primeira atividade, será solicitado que cada grupo classifique os polígonos representados pelas sete peças do Tangram em relação aos lados e propriedades, de modo a analisar e identificar as características de cada figura que compõe esse quebra-cabeça. Para a segunda atividade, determinamos que a área do quadrado menor valeria 1, assim, os alunos deveriam medir os lados e calcular a área de cada figura, à princípio sem intervenção. Caso surjam muitas dúvidas, as estagiárias podem auxiliar. Para a última atividade, os alunos serão instruídos a construir o maior número de triângulos e quadrados de diferentes formas e com as peças do Tangram que conseguirem, podendo utilizar quantas peças quiserem para essa construção. O objetivo é que os alunos encontrem e registrem as 12 formas (Anexo 1). Todas as atividades serão corrigidas no quadro, com a participação da turma.

Posteriormente, será entregue aos alunos um simulado sobre os conteúdos abordados nos seis encontros do Promat para ser resolvido individualmente e recolhido até o fim da aula.

Após o simulado, as estagiárias resolverão as questões solicitadas pelos alunos no quadro, tirarão dúvidas e farão um fechamento do conteúdo.

Verificação da aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas atividades propostas, resolução do simulado e respostas da dinâmica.

Referências:

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, vol 9: Geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

KACHAK, Sidenea do Rocio. **Tangram: o encanto pela Geometria Plana**. In: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_uepg_sideneadorociokachak.pdf. Acesso em: 09 nov. 2022.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática**: 8°ano: ensino fundamental, anos finais. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2018.

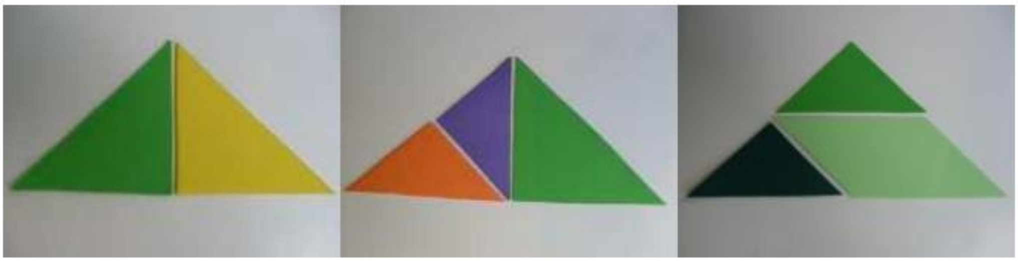
QUESTÃO 147 da prova azul do segundo dia do Enem 2019. **Descomplica**. Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2019/segundo-dia/qual-e-soma-das-medidas-das-areas-em-centimetros-quadrados-das-dez-placas/. Acesso em: 19 out. 2022.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial 8° ano**: ensino fundamental, anos finais. São Paulo: Scipione, 2018.

Anexos:

Anexo 1

Figura 42 – Tangram

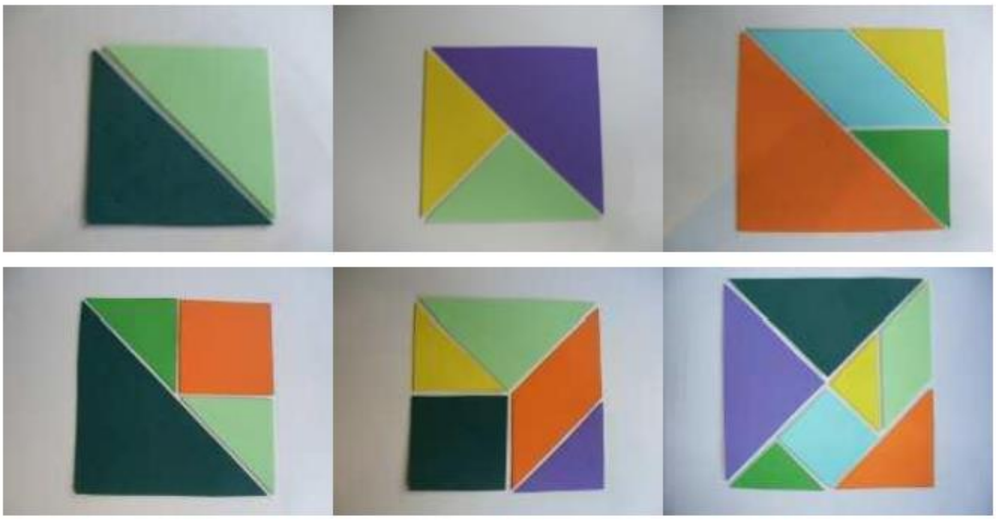


Fonte: Kachak (2016)

Figura 43 – Triângulos com Tangram

Fonte: Kachak (2016)

Figura 44 – Quadrados com Tangram



Fonte: Kachak (2016)

10.2 **Material entregue aos alunos**

Exercício introdutório

(Enem 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro d = 40 cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é h = 60 cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Figura 45 – Área

Fonte: Enem 2019

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

A) 16.628

B) 22.280

C) 28.560

D) 41.120

E) 66.240

Simulado do Enem

1. (Enem 2020) Muitos modelos atuais de veículos possuem computador de bordo. Os computadores informam em uma tela diversas variações de grandezas associadas ao desempenho do carro, dentre elas o consumo médio de combustível. Um veículo,

de um determinado modelo, pode vir munido de um dos dois tipos de computadores de bordo:

Tipo A: informa a quantidade X de litro de combustível gasto para percorrer 100 quilômetros.

Tipo B: informa a quantidade de quilômetro que o veículo é capaz de percorrer com um litro de combustível.

Um veículo utiliza o computador do Tipo A, e ao final de uma viagem o condutor viu apresentada na tela a informação "X/100". Caso o seu veículo utilizasse o computador do Tipo B, o valor informado na tela seria obtido pela operação

A) $X * 100$

B) $\frac{X}{100}$

C) $\frac{100}{X}$

D) $\frac{1}{X}$

E) $1 * X$

2. (Enem PPL 2020) Com base na Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, o peso de um objeto na superfície de um planeta aproximadamente esférico é diretamente proporcional à massa do planeta e inversamente proporcional ao quadrado do raio desse planeta. A massa do planeta Mercúrio é, aproximadamente, $\frac{1}{10}$ da massa da Terra e seu raio é, aproximadamente, $\frac{2}{5}$ do raio da Terra. Considere um objeto que, na superfície da Terra, tenha peso P.

O peso desse objeto na superfície de Mercúrio será igual a

A) $\frac{5P}{16}$

B) $\frac{5P}{2}$

C) $\frac{25P}{4}$

D) $\frac{P}{8}$

E) $\frac{P}{20}$

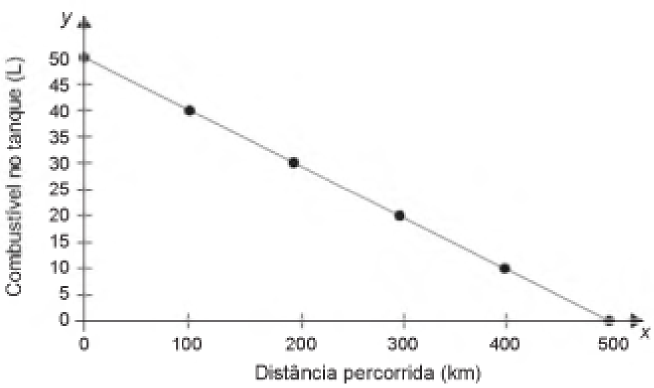
3. (Enem 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

A) 34
B) 42
C) 47
D) 48
E) 79

4. (Enem 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

Figura 46 – Combustível



Fonte: Enem 2018

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

A) $y = -10x + 500$

B) $y = -\frac{x}{10} + 50$

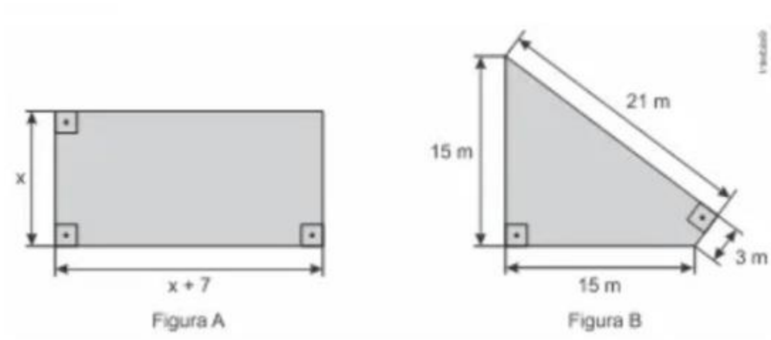
C) $y = -\frac{x}{10} + 500$

D) $y = \frac{x}{10} + 50$

E) $y = \frac{x}{10} + 500$

5. (Enem 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7m maior do que a largura.

Figura 47 – Área do quarto



Fonte: Enem 2016

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

A) 7,5 e 14,5.

B) 9,0 e 16,0.

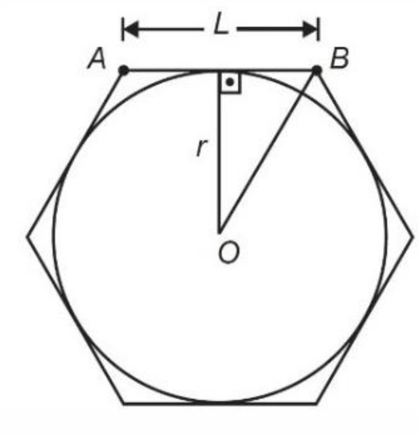
C) 9,39,3 e 16,3.

D) 10,0 e 17,0.

E) 13,5 e 20,5.

6. (Enem 2018) Um brinquedo chamado pula-pula, quando visto de cima, consiste em uma cama elástica com contorno em formato de um hexágono regular.

Figura 48 – Hexágono



Fonte: Enem 2018

Se a área do círculo inscrito no hexágono é 3π metros quadrados, então a área do hexágono, em metro quadrado, é:

A) 9

B) $6\sqrt{3}$

C) $9\sqrt{2}$

D) 12

E) $12\sqrt{3}$

7. (Enem 2016) Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Figura 49 – Casos confirmados

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

Fonte: Enem 2016

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

A) 59

B) 65

C) 68

D) 71

E) 80

8. (Enem 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Figura 50 – Gripe suína

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Fonte: Enem 2011

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

A) 8%.

B) 9%.

C) 11%.

D) 12%.

E) 22%.

9. (Enem 2013) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{5}{14}$

10. (Enem 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no

A) 19º dia.
B) 20º dia.
C) 29º dia.
D) 30º dia.
E) 60º dia.

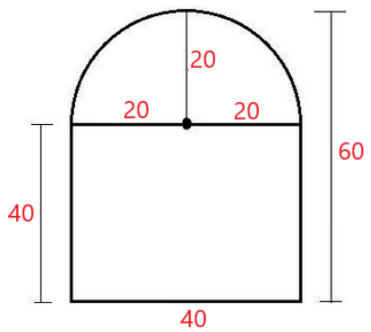
10.3 Resolução dos exercícios

Exercício introdutório

Resolução:

Letra B.

Figura 51 – Resolução área



Fonte: Descomplica (2019)

Logo, a área de uma placa é dada pela área do quadro + área do semicírculo. $A = l^2 + \frac{\pi r^2}{2} \Rightarrow A = 40^2 + \frac{3{,}14 \,.20^2}{2} = 1.600 + 628 = 2228.$

Mas como são 10 placas, então tempos $10 \times 2228 = 22.280$.

Simulado do Enem

Exercício 1)

Resolução:

Letra C

Consumimos x litros a cada 100 km. Assim, em 1 km consumimos $\frac{x}{100}$ litros. Dessa forma, podemos fazer a seguinte regra de três:

Litros – Distância

$\frac{x}{100}$ – 1 km

1 – y

Multiplicando cruzado:

$$1 \times 1 = \frac{x}{100} \times y \Rightarrow \frac{1}{\frac{x}{100}} = y \Rightarrow \frac{100}{x} = y$$

Ou seja, irá aparecer no visor $\frac{100}{x}$.

Exercício 2)

Resolução:

Letra A

Explicação:

O enunciado diz que o Peso e diretamente proporcional à massa do planeta e inversamente proporcional ao quadrado do raio desse planeta. Logo será

$$\mathrm{P} = \mathrm{K} \times \mathrm{M}' \times \frac{1}{\mathrm{R}^2}$$

Iremos chamar M' de massa do mercúrio e M'' de Massa do Planeta Terra.

Sabemos que a Massa do mercúrio (M') corresponde a $\frac{1}{20}$ da massa do planeta Terra (M'').

Logo a massa da Terra será 20 vezes o do Mercúrio.

M' = $\frac{M''}{20}$

(Usamos isso por causa que se considerarmos a força gravitacional da terra como base, podemos achar A força gravitacional de Mercúrio. Pois se pensarmos que um objeto cai na superfície da Terra, podemos deduzir como seria em Mercúrio, sabendo que a Terra equivale a tanta massa de Mercúrio ou o tanto que o raio da Terra equivale de Mercúrio).

O raio do planeta Mercúrio corresponde a $\frac{2}{5}$ do planeta Terra, logo: $r = \frac{2}{5} \times R$, onde o R é o raio da Terra.

Logo, o Raio da Terra equivale a $\frac{5r}{2}$, ou seja, equivale a $\frac{5}{2}$ ao raio do Mercúrio (o mesmo motivo do anterior, apenas usando a Terra como base).

Logo, a força gravitacional que a Terra exerce sobre um objeto, vai ser o mesmo que o Mercúrio exerce no mesmo objeto, ou seja, P = K $\frac{20M'}{\frac{5^2}{2^2}r^2}$.

Resolvendo essa equação, vai resultar em

P = $\frac{\mathrm{K} \times 20\mathrm{M}' \times 4}{25r^2}$

P = $\frac{K \times 16M'}{5r^2}$

$\frac{R^2}{k \times M} = \frac{16}{5P}$

Repare que $\frac{r^2}{K \times M}$ é o inverso da força gravitacional, ou seja, $\frac{K \times M}{r^2}$ representa a força gravitacional do planeta Mercúrio e ela corresponde $\frac{5P}{16}$, como invertemos $\frac{r^2}{K \times M}$, logo o $\frac{16}{5p}$ também será invertido.

Exercício 3)

Resolução:

Letra D

Seja x a quantidade de alunos que comprou 1 bilhete e seja y a quantidade de alunos que comprou 3 bilhetes. Assim, temos:

- Quantidade de alunos: x + y + 80 + 45 = x + y + 125
- Quantidade de bilhetes vendidos: x + 3x + 90.

Segundo o enunciado, podemos montar as seguintes equações:

x = 0,2(x + 3y + 90)

x + 3y + 90 = x + y + 125 + 33

Resolvendo o sistema, encontramos x = 48 e y = 34.

Exercício 4)

Resolução:

Letra B

A equação geral de uma reta é dada por: y = ax + b

Onde:

a= coeficiente angular.

Coeficiente angular = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Calculando o valor de a:

a = $\frac{50-0}{0-500} \Longrightarrow$ a = $\frac{50}{-500} \Longrightarrow$ a = $\frac{-1}{10}$

b = coeficiente linear (indica o ponto em que a reta corta o eixo y).

Analisando o gráfico, verifica-se que a reta corta o eixo y no ponto igual a 50.

Equação da reta:

y = $-\frac{x}{10}$ + 50.

Exercício 5)

Resolução:

Letra B

Primeiramente, dividimos a figura B em dois triângulos B1 e B2, um com altura de 21 m e base de 3 m e outro com altura e base medindo 15 m.

Assim, temos que área da figura A = área da figura, B = B1 + B2.

x(x + 7) = $\frac{15 \times 15}{2} + \frac{21 \times 3}{2}$ = 144

Fatorando 144, temos que:

$x(x + 7) = 9.16$

$x(x + 7) = 9(9 + 7)$

Assim, as medidas do retângulo são 9 m e 16 m.

Exercício 6)

Resolução:

Letra B

Primeiro passo. Usaremos a fórmula da área do círculo para descobrirmos o valor do raio, haja vista que já temos a área dele. Logo:

$AC = \pi.r^2$

$3\pi = \pi.r^2$

$\frac{3\pi}{\pi} = r^2$

$3 = r^2$

$\sqrt{3} = r$

Segundo passo. Descoberto o raio, usaremos a fórmula para descobrir a altura do triângulo equilátero, porém o intuito será descobrir o lado (L) dele. Logo:

$HT = L\frac{\sqrt{3}}{2}$

H (raio do círculo) = $L\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3} = L\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\sqrt{3} = L\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = L$

$2 = L$

Terceiro passo. Descoberto o lado do triângulo, que é um dos lados do hexágono, procuramos a área do hexágono. Logo:

$AH = \frac{6\,L^2\,\sqrt{3}}{4}$

$AH = \frac{6\,2^2\,\sqrt{3}}{4}$

AH = $\frac{6\,L^2\,\sqrt{3}}{4}$

AH = $6\sqrt{3}$.

Exercício 7)

Resolução:

Letra D

A média é dada por $\frac{237 + 262 + 158 + 159 + 160 + 278 + 300 + 278}{8}$ = 229.

Das oito regiões da cidade, cinco delas (oeste, centro, leste, centro-oeste e centro-sul) estão acima da média, ou seja, cada uma delas receberá 10 funcionários; três regiões estão abaixo da média (norte, sul e noroeste) e cada uma delas receberá 7 funcionários. Assim, a prefeitura deverá contratar $5 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 71$ funcionários.

Exercício 8)

Resolução:

Letra C

O total de pessoas atendidas no referido posto de vacinação é 42 + 22 + 56 + 30 + 50 = 200.

Dessas pessoas, apenas 22 são portadoras de doenças crônicas. A probabilidade de uma dessas pessoas ser selecionada é $\frac{22}{200} = \frac{11}{100}$ = 11%.

Exercício 9)

Resolução:

Letra A

Como o total de alunos entrevistados é 1200, temos que a soma será:

(600 – x) + x + (500 – x) + 300 = 1200

x = 200

Como o número de alunos que fala inglês é 600, o total que não fala inglês será o complementar de I:

$I^C = 1200 - 600 = 600$

Entre esses alunos, aqueles que falam espanhol será:

$I^C \cap E = 500 - x = 500 - 200 = 300$

Logo, a probabilidade pedida será:

$P = \frac{(I^C \cap E)}{I^C} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}.$

Exercício 10)

Resolução:

Letra B

Temos que encontrar o valor de t, para quando o valor de f(t) = 1600. Logo temos que:

$1600 = - 2t^2 + 120t$

Organizando essa equação do 2² grau temos que:

$2t^2 - 120t + 1600 = 0$

Agora precisamos encontrar o valor do discriminante.

$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 2 \times 160$

$\Delta = 14400 - 12800$

$\Delta = 1600$

Utilizando agora a fórmula resolutiva temos que:

$t = \frac{120 \pm \sqrt{1600}}{4}$

t' = 20

t" = 40

Voltando agora ao enunciado precisamos entender qual das duas opções de resposta é a que mais se adequa ao nosso problema:

"A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas".

Isso acontece no 20° e no 40° dia.

10.4 **Relatório**

Relatório do encontro 6 – 12/11/2022

No dia 12 de novembro de 2022, às 8:15 da manhã, realizamos o sexto encontro do Promat na sala A219.

Inicialmente, questionamos aos alunos se haviam dúvidas sobre a lista de exercícios do encontro anterior e foi respondido que não. Então, a estagiária Júlia perguntou se os alunos haviam compreendido por completo a resolução das questões sete e nove e eles falaram que não tinham certeza. Por serem questões mais complexas, decidimos resolvê-las no quadro. Uma aluna realizou a leitura da questão sete, enquanto a estagiária Giulia, anotou as informações no quadro. A estagiária Stephany explicou como interpretar a questão, que foi resolvida pela estagiária Giulia. Em seguida, foi resolvida a questão nove, sobre probabilidade. A estagiária Milena questionou se todos os alunos já haviam estudado fatorial e um aluno disse que não, então a estagiária explicou o que é fatorial e como calculá-lo para solucionar o exercício.

Dando sequência a aula, a estagiária Júlia falou que o tema do encontro era geometria plana e questionou os alunos sobre o que entendiam pelo tema e qual a diferença entre a geometria plana e espacial. Um aluno respondeu que são as figuras geométricas e outro que a geometria plana é aquela que está no plano. A estagiária Júlia explicou usando o quadro, o conceito de ponto, retas concorrentes e paralelas e ângulos. Também apresentou as definições de perímetro e área e as suas principais fórmulas. A estagiária Milena explicou de onde vem a fórmula da área do triângulo equilátero e questionou os alunos sobre como poderiam determinar a altura. Um aluno respondeu que poderia ser através "de Pitágoras", que foi desenvolvida e resolvida usando seno, chegando à fórmula da altura. A estagiária Stephany explicou a fórmula do trapézio, depois questionamos a diferença entre círculo e circunferência. Ao tratar o caso do paralelogramo, houve várias dúvidas, por exemplo, sobre quais figuras geométricas eram paralelogramos.

Posteriormente, entregamos um exercício e reservamos um tempo para que os alunos resolvessem. Logo depois, os alunos decidiram formar grupos para resolverem o exercício. Apenas uma aluna conseguiu chegar à resposta correta. A estagiária Milena corrigiu o exercício, então os alunos foram liberados para o lanche.

Após o intervalo, um aluno se voluntariou para mostrar outra forma de calcular a área do trapézio, a partir da área de dois paralelogramos.

Para a realização da próxima atividade, entregamos uma folha sulfite e um Tangram para cada aluno e efetuamos as orientações. Primeiro, os alunos deveriam fazer a classificação de cada peça do Tangram. Percebemos que os alunos não identificaram que o quadrado é, simultaneamente, um paralelogramo, um retângulo e um losango. Em seguida, realizamos a correção.

A segunda atividade foi para que os alunos calculassem a área de cada peça do Tangram. No primeiro momento, os alunos pensaram em usar a régua, contudo, os orientamos a considerar o lado do menor triângulo medindo uma unidade. Na terceira atividade, eles teriam que formar triângulos e quadrados com diferentes quantidades de peças. Por fim, orientamos que eles voltassem para os seus lugares e entregamos o simulado do Enem.

Percebemos que os alunos demonstraram bastante interesse em desenvolver as atividades utilizando o Tangram. Apesar de alguns não conseguirem conclui-la totalmente, mostraram-se bastante empenhados. Principalmente ao tentar encontrar todas as possíveis formas de construir triângulos e quadrados usando diferentes quantidades de peças. Inclusive, um aluno construiu um triângulo com 9 peças. Essa construção não foi prevista, uma vez que o aluno emprestou peças dos colegas para efetuar a montagem.

Acerca do simulado, a questão sete teve o maior número de acertos. Porém, devido à falta de anotações e pelo curto tempo de aplicação, foi difícil analisar o raciocínio utilizado pelos alunos para resolver as questões.

11. **Encontro 7**

11.1 **Plano de aula**

Plano de aula – sétimo encontro – 19/11/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Geometria espacial.

Objetivo geral: Compreender os conceitos e propriedades geométricas a fim de analisar, interpretar e solucionar situações-problemas no espaço.

Objetivos específicos:

- Reconhecer e diferenciar os sólidos geométricos;
- Calcular a área da superfície e o volume de um sólido geométrico;
- Identificar a relação de Euler;
- Planificar um sólido geométrico;
- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, jujubas, palitos, folha sulfite e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciar a aula, corrigindo o simulado do Enem aplicado no último encontro com a participação da turma. Serão retomados os conceitos abordados durante o Promat para esclarecer as dúvidas.

Posteriormente, os alunos serão divididos em duplas. Cada dupla receberá oito jujubas e doze palitos. Os alunos serão instruídos a construir os poliedros: tetraedro regular, hexaedro regular (cubo), pirâmide regular de base quadrada, prisma regular de base triangular e octaedro regular de modo que as jujubas representarão os vértices e os palitos as arestas, conforme o anexo 1. Serão abordados durante a execução da dinâmica a classificação dos sólidos em poliedros e corpos redondos, a classificação dos sólidos geométricos, área e volume.

Dando sequência a aula, será solicitado que cada grupo construa uma tabela (Anexo 2), determinando o número de faces, vértices e arestas de cada sólido construído. O objetivo é que os alunos analisem a tabela e encontrem uma relação entre esses elementos, conhecida como relação de Euler: $V + F = A + 2.$. Além disso, os alunos devem, também, desenhar as planificações de cada um dos poliedros.

A partir da relação de Euler podemos resolver:

Exemplo 1: Qual o número de vértices de uma pirâmide de base pentagonal que possui dez arestas?

Exemplo 2: Se tomarmos um icosaedro regular com doze vértices, qual é o número de arestas desse sólido?

Seguindo com o encontro, será entregue aos alunos uma lista de exercícios sobre geometria espacial a fim de aplicar o conteúdo visto na aula. Os alunos, caso prefiram, podem se juntar para resolver a lista.

Após a resolução, as estagiárias resolverão as questões solicitadas pelos alunos no quadro, tirarão dúvidas e farão um fechamento do conteúdo.

Verificação da aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos na dinâmica, atividades propostas e resolução dos exercícios.

Referências:

ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino da Geometria Espacial no Ensino Médio.** Orientador: Ronaldo da Silva Busse. 2014. 63 f. TCC (Graduação) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: file:///D:/Arquivos/Downloads/TCC_Fabiana-jujubas-geometria.pdf. Acesso em: 16 nov. 2022.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** Matemática. 1° ed. São Paulo: Moderna, 2006.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática:** pensar & descobrir. São Paulo: FDT, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO; Antonio. **Matemática e realidade**, 6º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

Anexos:

Anexo 1

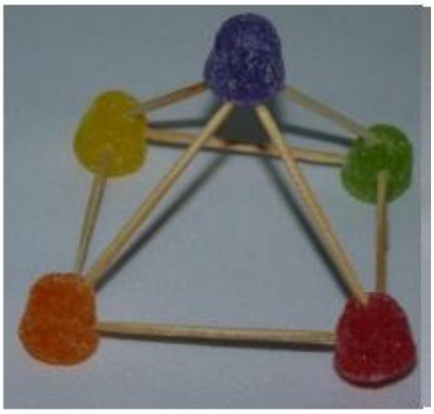
Figura 52 – Tetraedro

Fonte: Andrade (2014)

Figura 53 – Cubo

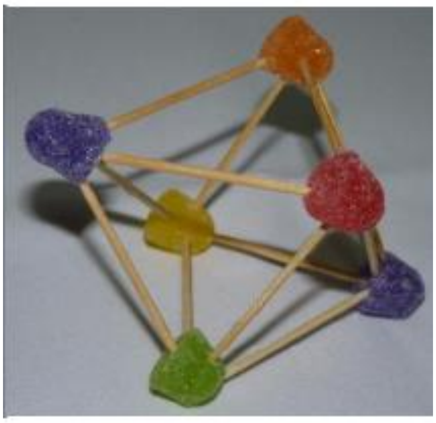
Fonte: Andrade (2014)

Figura 54 – Pirâmide



Fonte: Andrade (2014)

Figura 55 – Octaedro



Fonte: Andrade (2014)

Anexo 2

Quadro 23 – Relação de Euler

Nome do Poliedro	Vértices (jujubas)	Faces	Arestas (palitos)

Fonte: Elaborado pelas autoras

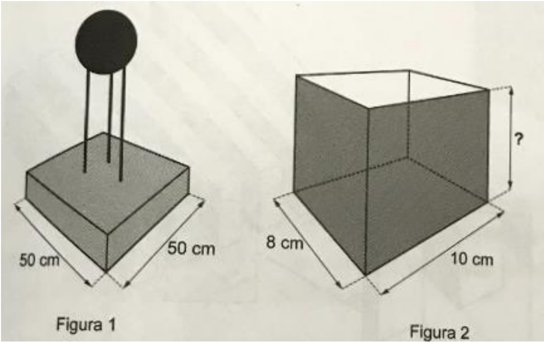
11.2 **Material entregue aos alunos**

- Jujubas e palitos para a realização das construções.

Lista de exercícios

1. (Enem 2020) Um clube deseja produzir miniaturas em escala do troféu que ganhou no último campeonato. O troféu está representado na Figura 1 e é composto por uma base em formato de um paralelepípedo reto-retângulo de madeira, sobre a qual estão fixadas três hastes verticais que sustentam uma esfera de 30 cm de diâmetro, que fica centralizada sobre a base de madeira. O troféu tem 100 cm de altura, incluída sua base.

Figura 56 – Troféu



Fonte: Enem 2020

A miniatura desse troféu deverá ser instalada no interior de uma caixa de vidro, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões internas de sua base estão indicadas na Figura 2, de modo que a base do troféu seja colada na base da caixa e distante das paredes laterais da caixa de vidro em pelo menos 1 cm. Deve ainda haver uma distância de exatos 2 cm entre o topo da esfera e a tampa dessa caixa de vidro. Nessas condições deseja-se fazer a maior miniatura possível.

A medida da altura, em centímetro, dessa caixa de vidro deverá ser igual a

A) 12

B) 14

C) 16

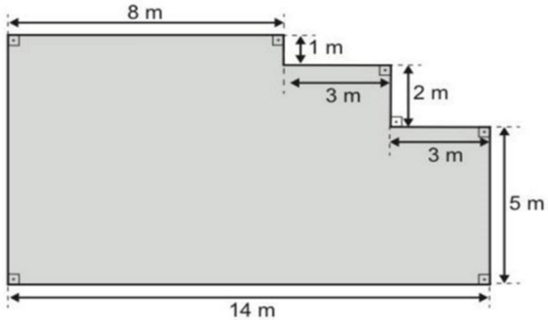
D) 18

E) 20

2. (Enem 2019) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O

concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m^3, 5 m^3 e 10 m^3 de concreto.

Figura 57 – Laje



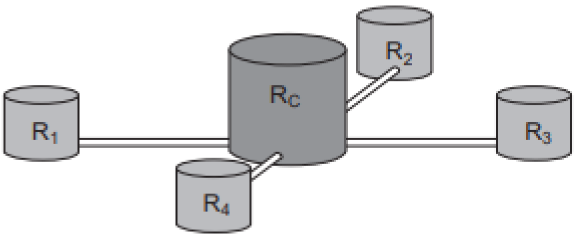
Fonte: Enem (2019)

Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

A) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.
B) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.
C) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m^3.
D) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m^3.
E) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m^3.

3. (Enem 2019) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (Rc) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R1, R2, R3 e R4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.

Figura 58 – Reservatórios cilíndricos



Fonte: Enem (2019)

As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.

No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

A) 1,44

B) 1,16

C) 1,10

D) 1,00

E) 0,95

4. (Enem 2017) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
- Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
- Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

A) 1

B) 2

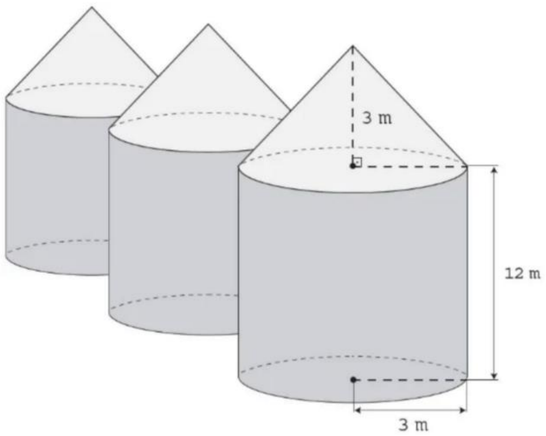
C) 3

D) 4

E) 5

5. (Enem 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Figura 59 – Silos



Fonte: Enem (2016)

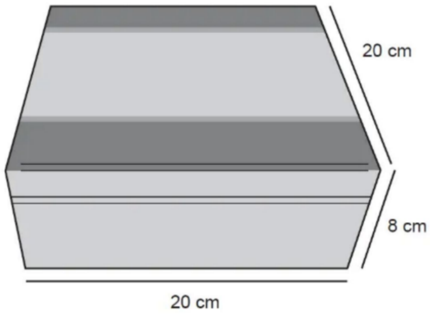
Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A) 6
B) 16
C) 17
D) 18
E) 21

6. (Enem 2018) Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura

Figura 60 – Caixa de madeira



Fonte: Enem (2018)

A caixa de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões externas, em centímetro, estão indicadas na figura. Sabe-se também que a espessura da madeira, em todas as suas faces, é de 0,5 cm.

Qual é o volume de madeira utilizado, em centímetro cúbico, na construção de uma caixa de madeira como a descrita para embalar os chocolates?

A) 654

B) 666

C) 673

D) 681

E) 693

7. (Enem 2014) Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas no aquário.

Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário.

O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a

A) 48.

B) 72.

C) 84.

D) 120.

E) 168.

11.3 Resolução dos exercícios

Anexo 2 – exercício

Quadro 24 – Relação de Euler

Nome do Poliedro	Vértices (jujubas)	Faces	Arestas (Palitos)
Tetraedro regular	4	4	5
Hexaedro regular	8	6	12
Pirâmide regular de base quadrada	5	5	8
Prisma regular de base triangular	4	4	6
Octaedro regular	6	8	12

Fonte: Elaborado pelas autoras

Exemplo 1: Qual o número de vértices de uma pirâmide de base pentagonal que possui dez arestas?

Da Relação de Euler, temos: $V + F = A + 2 \Rightarrow V = 10 + 2 - 6 = 6$. Logo, possui 6 vértices.

Exemplo 2: Se tomarmos um icosaedro regular com doze vértices, qual é o número de arestas desse sólido?

Da Relação de Euler, temos: $V + F = A + 2 \Rightarrow A = 12 + 20 - 2 = 30$. Logo, possui 30 arestas.

Lista de exercícios

Exercício 1)

Resolução:

LETRA E

Como a figura 2 possui faces opostas paralelas e iguais e base triangular, sua representação é dada por um prisma triangular reto.

Exercício 2)

Resolução:

LETRA C

A planificação deve apresentar duas bases impressas opostas e quatro laterais na visão tridimensional. A única alternativa que apresenta tal imagem é a Letra C.

Exercício 3)
Resolução:
LETRA E

Da planificação para a figura, poderemos ver que as faces 2 e 4 compartilham uma aresta assim como os pares 2 – 1 e 2 -3. Analogicamente, podemos formas as faces 5, 6, e 8 sendo a 8 a face cinza. Desta forma, a face cinza só será oposta à face 4.

Exercício 4)
Resolução:
LETRA B

Como a base do troféu original tem o formato de um quadrado, então o quadrado máximo que podemos inserir no espaço 6 cm x 8 cm é o quadrado de lado igual a 6 cm.
Logo, as dimensões da miniatura do troféu serão: 6 cm, 6 cm e 12 cm (respeitando a proporção X, X, $2X$). A altura da miniatura do troféu vale 12 cm, ainda temos que somar 2 cm para que haja uma distância entre o topo da esfera e a tampa da caixa de vidro. Finalmente, a medida da altura, em centímetro, dessa caixa de vidro deverá ser igual a $12 + 2 = 14$ cm.

Exercício 5)
Resolução:
LETRA C

A área total da laje é $64 + 21 + 15 = 100$ m².
Volume = 100 m² x 5 cm
[5 cm = $0{,}05$ m]
Volume = 100 x $0{,}05$ m³
Volume = 5 m³.

Exercício 6)

Resolução:

LETRA C
I. A caixa 2 não serve, pois tem uma dimensão
75 cm < 80 cm
II. $V1$, $V3$, $V4$ e $V5$ são respectivamente os volumes da caixa 1, caixa 3, caixa 4 e caixa 5.
$V1 = 86 . 86 . 86 = 636\,056$ cm³
$V3 = 85 . 82 . 90 = 627\,300$ cm³
$V4 = 82 . 95 . 82 = 638\,780$ cm³
$V5 = 80 . 95 . 85 = 646\,000$ cm³
A caixa que dar a menor diferença volumétrica em relação ao objeto cúbico citado é a de número 3.

Exercício 7)

Resolução:

LETRA D

O volume do silo pode ser calculado por Vcilindro + Vcone.

Vcilindo = $\pi . r^2 . h$

Vcone = $\frac{\pi . r^2 . h}{3}$

Vsilo = 351 m^3.

O caminhão de $20m^3$ precisa fazer $\frac{351}{20} = 17{,}55$ viagens. Arredondando, o número mínimo de viagens é 18.

Veja que a resposta correta não pode ser 17, porque com 17 viagens de 20m^2 cada, ainda faltariam $351 - 17 \times 20 = 11\ m^2$. Logo, precisamos arrendondar para cima e fazendo a 18ª viagem com o restante.

Exercício 8)

Resolução:

LETRA C

Calcularemos a diferença entre os volumes interno e externo da caixa, sabendo que no volume interno será retirado 1 cm de cada dimensão. Então, temos que:

$$V = 20 * 8 * 20 - 19 * 7 * 19 = 3200 - 2527 = 673\ cm^3.$$

11.4 Relatório

Relatório do encontro 7 – 19/11/2022

No dia 19 de novembro de 2022, às 8:12 da manhã, realizamos o sétimo encontro do Promat na sala A219.

Inicialmente, concedemos um tempo para que os alunos tirassem dúvidas em relação ao simulado do Enem, entregue na aula anterior. Surgiram dúvidas nas questões um, dois, três e seis, que foram resolvidas no quadro pelas estagiárias Giulia, Stephany e Milena. Durante a resolução da questão seis, uma aluna questionou se também poderia resolvê-la utilizando o Teorema de Pitágoras. Foi explicado que sim e então a questão resolvida das duas maneiras. As demais resoluções foram comentadas oralmente com a participação da turma. Dessa maneira, conseguimos retomar conceitos já trabalhados nos encontros anteriores.

Dando sequência a aula, pedimos que os alunos se dividissem em duplas ou trios para a realização da dinâmica. Antes de iniciá-la, mostramos alguns sólidos geométricos aos alunos para que percebessem suas características, diferenças e os classificassem em corpos redondos ou poliedros. A partir das respostas, determinamos o nome das figuras geométricas espaciais e definimos poliedros regulares, irregulares, convexos e côncavos. Nesse momento, notamos que a maior parte dos alunos teve dificuldade em determinar a nomenclatura de dois sólidos: um prisma irregular e o octaedro.

Entregamos a cada aluno oito jujubas, doze palitos e uma folha sulfite para que fosse realizada a dinâmica. Instruímos que os alunos construíssem, utilizando os materiais disponíveis, os seguintes sólidos geométricos: tetraedro regular, hexaedro regular (cubo), pirâmide regular de base quadrada, prisma regular de base triangular e octaedro regular. Os alunos tiveram mais dificuldade para construir o prisma regular de base triangular e o octaedro regular. Porém, com a ajuda dos sólidos que estavam circulando pelos grupos, conseguiram se basear no formato e realizar a construção. Outra dificuldade da atividade foi que alguns alunos não conheciam o tetraedro, mas com auxílio das estagiárias também conseguiram realizar sua construção.

Conforme realizavam as construções, os alunos desenharam em suas folhas uma tabela onde descreveram o número de faces, vértices e arestas de cada sólido. Depois de analisar a tabela, questionamos aos alunos se foi possível perceber alguma relação entre os valores encontrados. Umas das alunas percebeu uma relação, mas não soube expressá-la, apenas que envolvia o número dois. Outro aluno respondeu que conhecia a relação, pois já havia a estudado na escola e que se chamava Relação de Euler. Logo, escrevemos a expressão $V + F = A + 2$ no quadro e destacamos que essa relação só é válida para poliedros convexos.

Seguindo com o encontro, perguntamos aos alunos se eles conheciam o que era a planificação de um sólido. Alguns alunos responderam animados que sim, que era ‘’colocar o sólido no papel’’ e que gostavam desse assunto pois era dinâmico e divertido. Desenhamos então, no quadro, a planificação dos sólidos geométricos da dinâmica e relembramos as fórmulas para o cálculo do volume do cone, pirâmide, cilindro, prisma e esfera.

Por fim, entregamos aos alunos uma lista de exercícios do Enem para que resolvessem em sala, com o intuito de colocar em prática os conteúdos abordados durante o encontro. A questão que gerou mais dúvidas foi a número quatro, a respeito de volume. Os alunos tiveram dificuldade de interpretar corretamente as informações e perceber a relação entre as medidas do exercício.

Os alunos se mostraram muito participativos e dispostos a realizar as atividades propostas, principalmente a dinâmica. Todos estavam muito empenhados em construir os sólidos geométricos corretamente e foi possível perceber que, mesmo quando algum integrante não estava conseguindo construir corretamente, outro colega do grupo auxiliava conforme podia. Além disso, ficaram ansiosos para terminar a dinâmica pois como resultado do esforço poderiam comer as jujubas da tarefa.

12. **Encontro 8**

12.1 **Plano de aula**

Plano de aula – oitavo encontro – 26/11/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Trigonometria.

Objetivo geral: Compreender os conceitos e propriedades trigonométricas a fim de analisar, interpretar e solucionar situações-problemas.

Objetivos específicos:

- Compreender e diferenciar as razões trigonométricas;
- Identificar as razões trigonométricas no círculo trigonométrico;
- Determinar um lado desconhecido a partir de dois lados conhecidos em um triângulo retângulo;
- Construir geometricamente a igualdade de Pitágoras;
- Identificar e utilizar a relação entre os lados de um triângulo retângulo;
- Estimar a altura de grandes corpos a partir de conhecimentos trigonométricos;
- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, régua, folhas sulfites, tabuleiro, fichas, círculo trigonométrico, trena, transferidor, *Notebook,* projetor *e Power Point*.

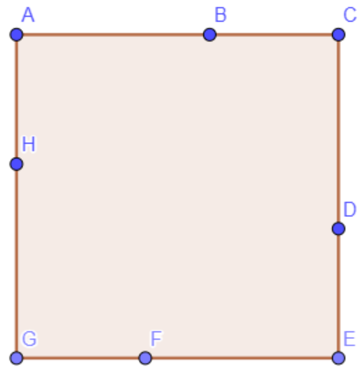
Encaminhamento metodológico:

Iniciar a aula, instruindo os alunos a demonstrarem geometricamente a igualdade de Pitágoras:

Demonstração do teorema de Pitágoras a partir da construção geométrica

- Entregar uma folha sulfite e uma régua a cada um dos alunos;
- Pedir para que construam dois quadrados de lados $a + b$; (para isso precisam escolher as medidas de a e b, por exemplo 3 e 2);
- Em seguida, pedir os alunos separarem um dos quadrados e anotarem os pontos A, B, C, D, E, G e H da seguinte forma:

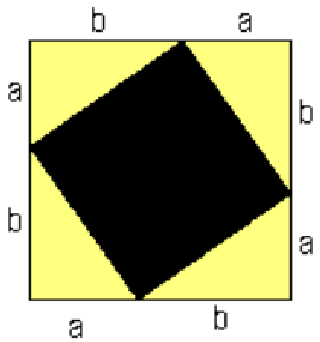
Figura 61 – Quadrado



Fonte: Elaborado pelas autoras

- Pedir para os alunos ligarem os pontos centrais (B, D, F e H) de forma que teremos:

Figura 62 – Demonstração de Pitágoras



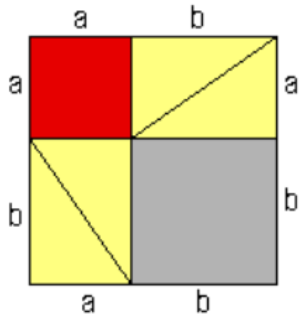
Fonte: Figueiró et al. (2012)

Quatro triângulos de lados de $\acute{a}rea = a.b/2$

E um quadrado central de $\acute{a}rea = c^2$ (chamamos o lado de c)

- Pedir que os alunos recortem os 4 triângulos do quadrado acima e os reorganizem em cima do segundo quadrado de lado $a + b$ (ainda não tinha sido usado), da seguinte forma:

Figura 63 – Demonstração



Fonte: Figueiró et al. (2012)

Sabemos que a área dos dois quadrados grandes é a mesma= $(a+b)^2$

Ambos possuem 4 triângulos de $área = \ a.b/2$.

Portanto, as áreas que sobram devem ser as mesmas.

A área que sobrou no primeiro quadrado= c^2 (preto)

A área que sobrou no segundo quadrado= $a^2 + b^2$ (vermelho + cinza)

Logo, $c^2 = a^2 + b^2$.

Dando sequência a aula, realizar a atividade “tabuleiro pitagórico” (Anexo 1) de modo que, a cada rodada o jogador deve “comprar” um cartão do monte e determinar o valor da incógnita nele apresentado. Caso o aluno acerte a resposta, deverá avançar com seu peão o mesmo número de casas correspondente ao valor da incógnita. Caso o aluno dê a resposta incorreta, deve voltar o valor de casas igual à última jogada. O cartão cuja resolução gerou uma resposta errada deve ser dado ao próximo jogador. Ganha a partida o jogador que percorrer todo o tabuleiro primeiro ou que estiver mais próximo da chegada ao fim do tempo dessa etapa. O objetivo é que os alunos utilizem a fórmula de Pitágoras para determinar os valores procurados.

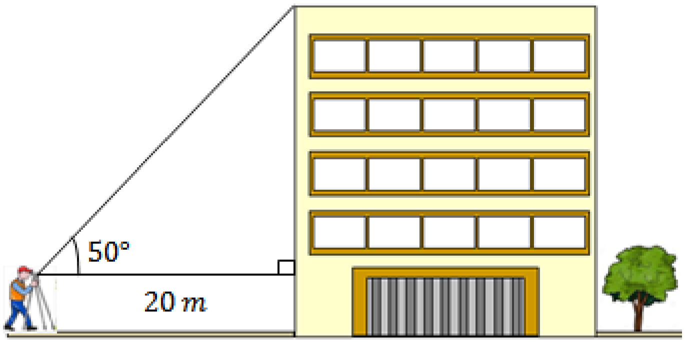
Seguindo com o encontro, apresentar lâminas abordando as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente e o teorema de Pitágoras. Juntamente, serão conceituadas secante, cossecante e cotangente, utilizando o quadro e as razões trigonométricas vistas anteriormente.

Nesse momento será solicitado que os alunos elaborem estratégias para solucionar o problema a seguir:

<u>Problema 1 (lâminas)</u>

Uma pessoa com 1,75m de altura e que se encontra a 20m da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50°. Qual a altura aproximada do edifício?

Figura 64 – Altura do edifício



Fonte: OBMEP

Então, os alunos serão acompanhados pelas estagiárias até o exterior do prédio da Unioeste para a realização de uma atividade prática, conhecida como experimento de teodolito. Os alunos deverão primeiramente determinar a distância de sua posição até a base da construção. Em seguida, usando um transferidor, devem determinar o ângulo de observação do topo do prédio. Após anotar os dados, os alunos serão reconduzidos a sala, onde, usando as informações coletadas, deverão estimar a altura do prédio. Nesse momento, os alunos devem relacionar o experimento com a resolução do exercício anteriormente proposto.

Verificação da aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas atividades propostas, resolução dos exercícios e anotações das dinâmicas.

Referências:

ARANTES, Janildo. Blog Janildo Arantes. Disponível em: https://www.professorjanildoarantes.com.br/2022/06/trigonometria-pedro-localizado-

8-metros.html. Acesso em: 01 dez. 2022.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na Medida Certa**, 5ª série. 2. ed. São Paulo, Scipione, 1994.

FIGUEIRÓ, Laralyze Gomes; VARGAS, Dejalmir Chaves de; OLIVEIRA, Elieze Carvalho de; SANTOS, Luciana Dalla Nora dos; COUTO, Mara Rubia Machado. ATIVIDADES DIFERENCIADAS NO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS. [S. l.], 3 ago. 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Figueiro_Laralyze.pdf. Acesso em: 24 nov. 2022.

FARAGO, Jorge Luiz. **Do ensino da História da Matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2003.

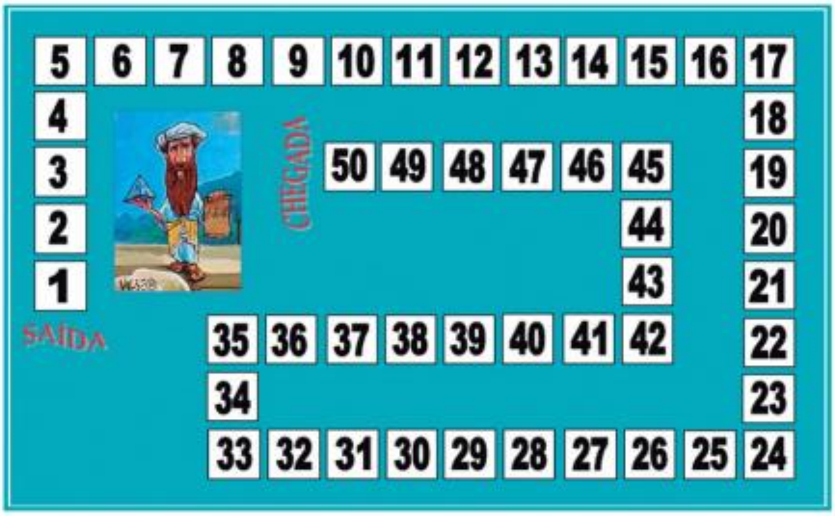
BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

GOVERNO DO RIO DE JANEIRO. Teorema de Pitágoras: Encaixando e aprendendo. Dinâmica 7, [s. l.]. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/012016/802c336ed29a579bc65dc24721603574.pdf. Acesso em: 24 nov. 2022.

Anexos:

Anexo 1

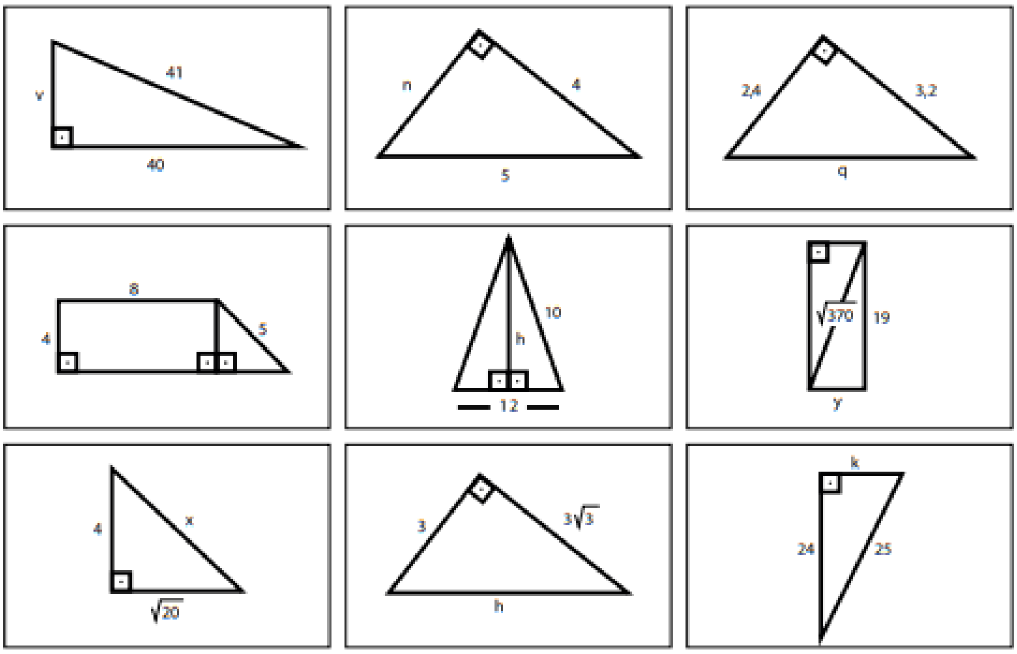
Figura 65 – Tabuleiro pitagórico



Fonte: Secretaria de Estado de Educação e Secretaria de Ciência e Tecnologia (Rio de Janeiro)

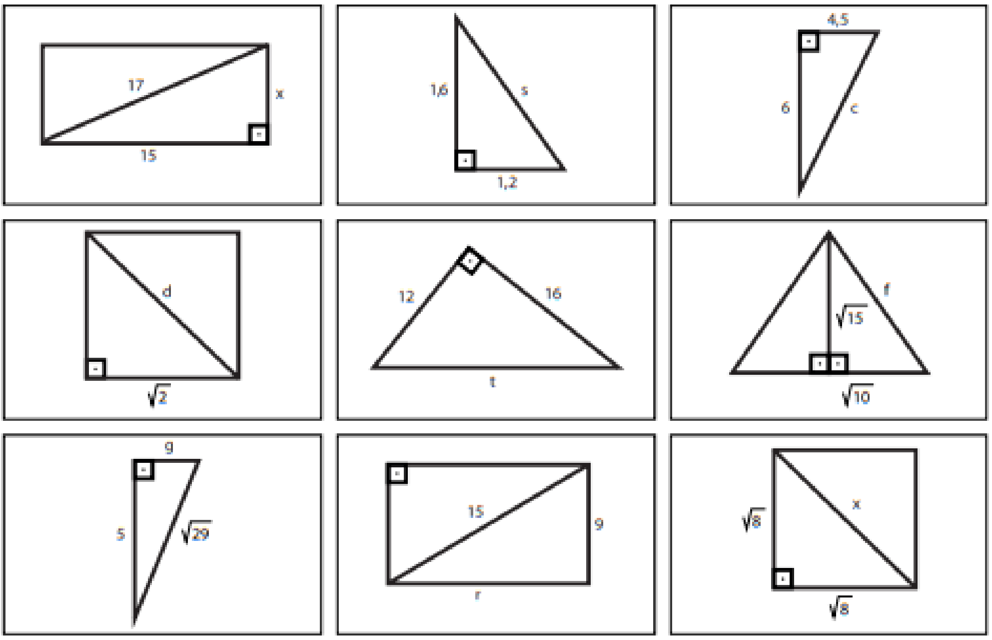
Anexo 2

Figura 66 – Fichas do tabuleiro



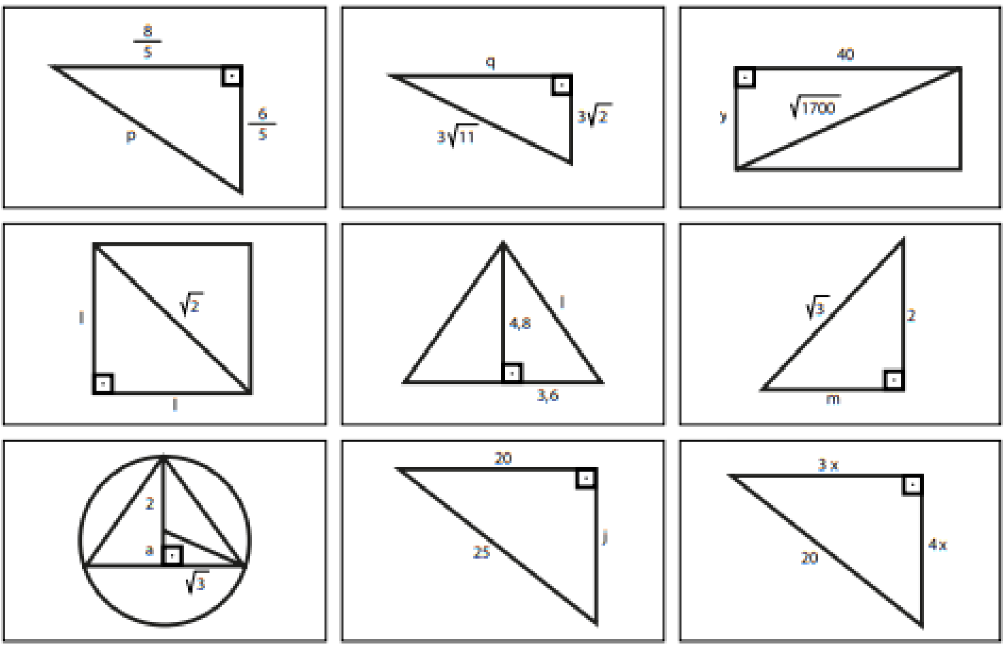
Fonte: Secretaria de Estado de Educação e Secretaria de Ciência e Tecnologia (Rio de Janeiro)

Figura 67 – Fichas para tabuleiro



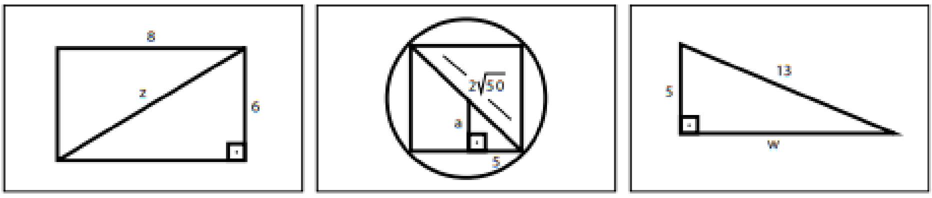
Fonte: Secretaria de Estado de Educação e Secretaria de Ciência e Tecnologia (Rio de Janeiro)

Figura 68 – Fichas do jogo



Fonte: Secretaria de Estado de Educação e Secretaria de Ciência e Tecnologia (Rio de Janeiro)

Figura 69 – Fichas Pitágoras

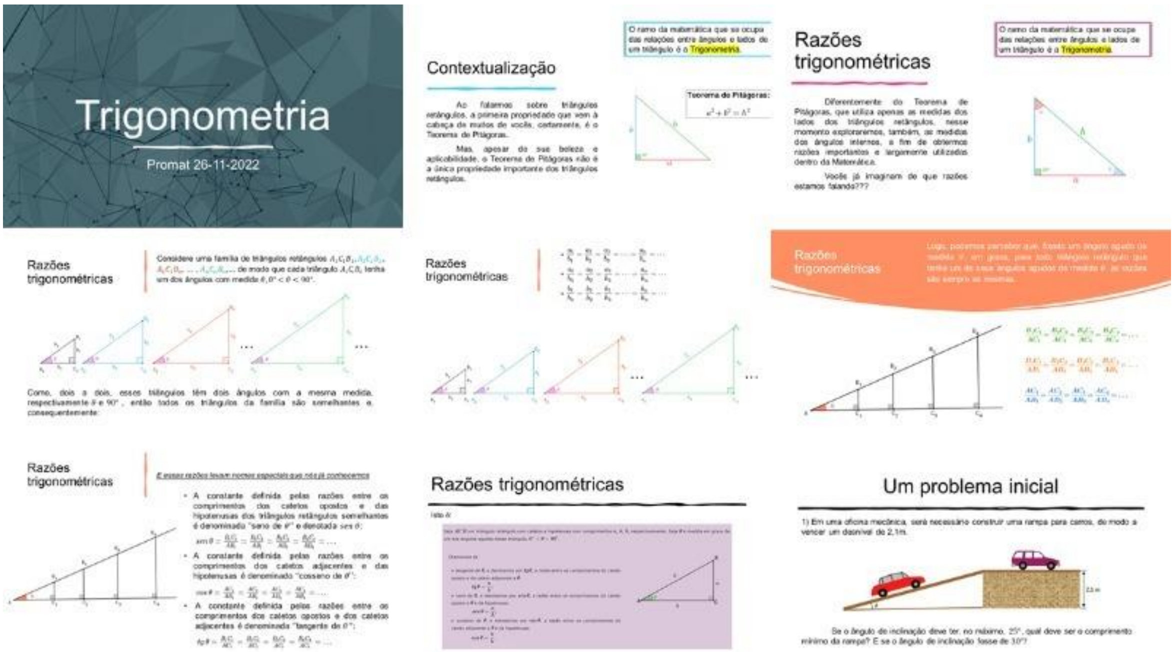


Fonte: Secretaria de Estado de Educação e Secretaria de Ciência e Tecnologia (Rio de Janeiro)

Apêndices

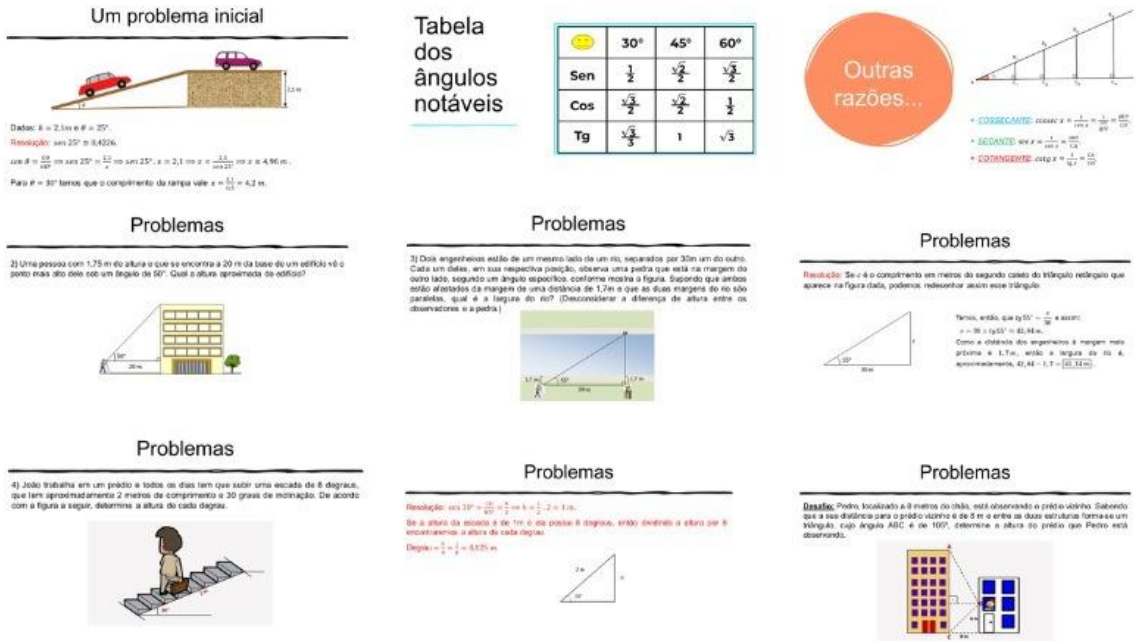
Lâminas

Figura 70 – Lâminas



Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 71 – Lâminas



Fonte: Elaborado pelas autoras

12.2 Material entregue aos alunos

Apenas os materiais utilizados nas dinâmicas.

12.3 Resolução dos exercícios

Exercícios das lâminas

1)

Resolução:

Como $sen\ 25° \cong 0{,}4226$

Logo, $sen\ \theta = \frac{CO}{HIP} \Longrightarrow sen\ 25° = \frac{2{,}1}{x} \Longrightarrow sen\ 25°\ .\ x = 2{,}1 \Longrightarrow x = \frac{2{,}1}{sen\ 25°} \Longrightarrow x \cong 4{,}96\ m$.

Para $\theta = 30°$ temos que o comprimento da rampa vale $x = \frac{2{,}1}{0{,}5} = 4{,}2\ m$.

2)

Resolução:

$$tg\ 50° = \frac{CO}{CA} \Longrightarrow 1{,}1917.20 = CO \Longrightarrow CO \cong 23{,}834\ m.$$

Logo $h = 23{,}834 + 1{,}75 \Longrightarrow h \cong 25{,}584\ m.$

3)

Resolução:

Se c é o comprimento em metros do segundo cateto do triângulo retângulo que aparece na figura dada, então temos que:

$$tg\ 55° = \frac{c}{30} \Longrightarrow c \cong 42{,}84\ m.$$

Como a distância dos engenheiros à margem mais próxima é $1{,}7\ m$, então a largura do rio é, aproximadamente, $L = 42{,}84 - 1{,}7 \Longrightarrow L \cong 41{,}14\ m$.

4)

Resolução:

$sen\ 30° = \frac{CO}{HIP} = \frac{h}{2} \Longrightarrow h = \frac{1}{2}\ .\ 2 = 1\ \text{m}.$

Se a altura da escada é de 1m e ela possui 8 degraus, então dividindo a altura por 8 encontraremos a altura de cada degrau.

Degrau $= \frac{h}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125\ m.$

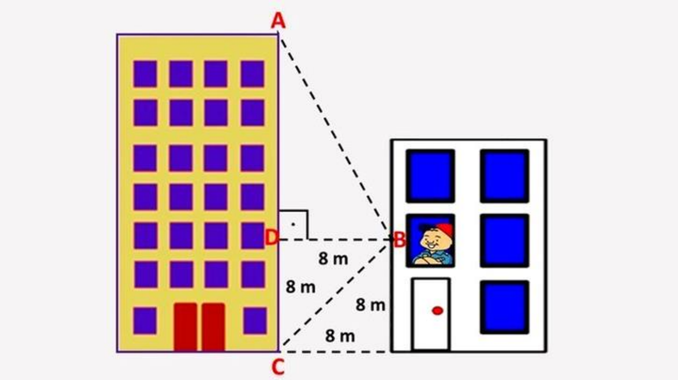
5)

Resolução:

No desenho, ao efetuarmos a projeção do ponto B no prédio que Pedro está observando, dando a ele o nome de D, criamos o triângulo isósceles DBC.

O triângulo isóscele possui dois lados iguais e, portanto, $DB\ =\ DC\ =\ 8\ m$.

Figura 72 – Trigonometria resolução



Fonte: Arantes (2022)

Utilizando a função tangente:

$$tg\ 30° = \frac{8}{CA} \Longrightarrow CA = 13{,}86\ m.$$

A altura do prédio representa a distância entre os vértices A e C, sendo assim

$$AC = 13{,}86 + 8 \Longrightarrow AC = 21{,}86\ m.$$

Portanto, a altura do prédio é de $21{,}86\ m$.

12.4 **Relatório**

Relatório do encontro 8 – 26/11/2022

No dia 26 de novembro de 2022, às 8:17 da manhã, realizamos o oitavo encontro do Promat no Laboratório de Ensino da Matemática (LEM), devido a impossibilidade de usar a sala A219, dado a sua utilização para o concurso do município.

Inicialmente, questionamos os alunos sobre o que acharam do Enem. Concedemos um tempo para que eles tirassem dúvidas sobre as questões que mais tiveram dificuldades e fizessem seus apontamentos sobre a prova. Alguns alunos ficaram com dúvida na questão 151 da prova amarela (2022). Nesta questão, especificamente, não conseguiram interpretar que a velocidade era dada pela expressão $V = T^2 - 4$ e não pelo gráfico. Um aluno afirmou que acertou a questão de mediana, pois havíamos trabalhado este conteúdo em aulas anteriores. Outra aluna agradeceu por termos trabalhado sobre planificações, pois, dessa forma, ela conseguiu resolver uma questão sobre o conteúdo. Para finalizar esse primeiro momento, um aluno perguntou acerca da questão 4 da lista entregue na aula anterior, sobre o volume do paralelepípedo. A estagiária Milena explicou a resolução individualmente.

Dando sequência a aula, questionamos os alunos se eles se recordavam da relação matemática entre os lados de um triângulo retângulo conhecida como Teorema de Pitágoras e a registramos no quadro, todos demonstraram conhecê-la. A partir disso, entregamos a cada um dos alunos uma folha sulfite e uma régua para que pudessem construir geometricamente a igualdade de Pitágoras. Para isso, pedimos que construíssem dois quadrados iguais, com seus lados medindo $a + b$, ;. Os alunos ficaram livres para escolher as medidas a e b que determinavam o lado do quadrado.

A estagiária Julia, com o auxílio da lousa, os conduziu, passo a passo, de modo a perceberem a relação. Alguns alunos tiveram dificuldade em construir o quadrado sozinhos e para sobrepor os triângulos nos locais indicados. Outros, tiveram dificuldade para concluir a relação ao final da atividade, por isso, a explicamos de formas diferentes mais que uma vez.

Posteriormente, dividimos os alunos em uma dupla e um trio e entregamos mais uma folha sulfite, um tabuleiro e as fichas para a aplicação do jogo “tabuleiro pitagórico”. A estagiária Giulia explicou como iria funcionar o jogo. Os alunos, um por vez, “compravam” uma ficha e determinavam o valor da incógnita nele apresentado, utilizando o Teorema de Pitágoras. Por conseguinte, o aluno efetuava a resolução na folha e mostrava para os colegas analisarem se estava correta. Se o aluno acertava a resposta, avançava com seu peão o mesmo número de casas correspondente ao valor da incógnita, caso contrário, voltava o valor de casas igual à última jogada.

A maior dificuldade dos alunos foi em calcular o valor da incógnita. A grande maioria conseguiu identificar as medidas dos catetos e da hipotenusa. Um dos alunos esqueceu de elevar a hipotenusa ao quadrado quando aplicou na fórmula. Em uma das fichas em que o valor dos catetos eram $3x$ e $4x$, alguns deles elevaram somente o “x” ao quadrado, obtendo $3x^2$ e $4x^2$, ao invés de $9x^2$ e $16x^2$. Um erro também comum nas anotações de um dos alunos foi ao aplicar o inverso da potência para “removê-la” da equação. O aluno multiplicou o outro lado por $\frac{1}{2}$, ao invés de extrair a raiz quadrada em ambos os lados da equação. Em contrapartida, uma aluna demonstrou grande domínio nos registros de seus cálculos, obtendo corretamente os resultados para cada incógnita procurada.

Após o intervalo, finalizamos a dinâmica e apresentamos as lâminas para explicar as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Nesse momento, uma das alunas disse que nunca tinha aprendido direito esse conteúdo na escola, e que agora parecia mais fácil. Ainda utilizando o projetor, apresentamos alguns exercícios para que os alunos elaborassem estratégias de resolução. Para o último exercício proposto, a estagiária Ana registrou a resolução no quadro, de modo que todos compreendessem e observassem os cálculos utilizados.

A estagiária Stephany explicou o desenvolvimento da próxima atividade, e então, conduzimos os alunos à parte externa da universidade para realizarmos o experimento do teodolito, a fim de calcular a altura da caixa de água da Unioeste. Alguns alunos apresentaram muita vontade de participar do experimento, visualizando o ângulo de inclinação e ajudando os colegas a analisar também. Outros, preferiram ficar apenas observando ou auxiliando. Um dos alunos relatou que já havia realizado o experimento na escola. Após o levantamento de dados reconduzimos os alunos para a sala e os instruímos a estimar a altura desejada no papel. Os valores encontrados foram 16 m e 30 m.

Os alunos demonstraram grande interesse em realizar cada uma das atividades propostas, principalmente o jogo de tabuleiro. Todos estavam muito empenhados em determinar corretamente as incógnitas para avançar na frente dos seus oponentes e ganhar o jogo. Também percebemos grande interesse e participação dos alunos para compreender as razões trigonométricas apresentadas nas lâminas, mesmo este sendo um conteúdo que já haviam demonstrado não terem muito apreço, provavelmente pela forma que ele é conduzido no ensino básico. O mais interessante de tudo, no entanto, foi percebermos o quanto os alunos progrediram no decorrer da aula, expressando suas ideias, tirando dúvidas e interagindo ativamente com as estagiárias e entre si.

13. Encontro 9

13.1 Plano de aula

Plano de aula – Encontro 9 - 03/12/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Matemática financeira.

Objetivo geral: Compreender os conceitos da Matemática financeira de modo a administrar gastos, comprar e investir conscientemente.

Objetivos específicos:

- Reconhecer as distintas possibilidades para se realizar uma compra;
- Identificar as vantagens e desvantagens das modalidades de crédito;
- Compreender os conceitos que englobam o mercado financeiro;

- Diferenciar e calcular juros simples e composto;
- Planejar financeiramente um investimento ou uma compra;
- Interpretar e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, folhas sulfites, atividades impressas, *smartphone* e *internet*.

Encaminhamento metodológico:

Iniciar a aula, entregando aos alunos alguns cartazes de ofertas falsas encontradas em estabelecimentos comerciais espalhados pelo mundo. O objetivo é fomentar a troca de ideias entre os alunos a fim de identificar as incoerências e pegadinhas de cada situação.

Posteriormente, serão feitos alguns questionamentos aos alunos:

- Como normalmente vocês realizam uma compra?
- Quais são as formas de realizar uma compra?
- Qual é a mais vantajosa?
- Como devo proceder se eu não tiver dinheiro para pagar à vista?
- De quais formas posso guardar/juntar dinheiro?
- Qual é a mais vantajosa?
- O que preciso saber antes de realizar um financiamento ou empréstimo?

Nesse momento, serão abordados e discutidos oralmente conceitos como: pagamento à vista, a prazo (parcelado), aplicações de renda fixa e de renda variável, poupança, inflação, consórcio e juros.

A fim de aplicar os conceitos abordados e destacar as diferenças entre os juros, será entregue uma atividade com alguns exercícios aos alunos.

Após a resolução e correção da atividade, será entregue uma lista com os impostos federais, estudais e municipais que são cobrados no Brasil. Nesse instante, os alunos serão questionados:

- Já conheciam todos os impostos da lista? Se não, quais conheciam?
- Para que servem os impostos que pagamos?
- Todos os trabalhadores pagam o mesmo valor em impostos?

Dando sequência a aula, será entregue aos alunos uma situação-problema e uma folha sulfite para registro das respostas. Nessa situação, os alunos devem analisar duas opções de salário e responder qual escolheriam. A partir do exercício, será destacado a velocidade com que a função exponencial cresce, bem como a importância da educação financeira em situações como essa que aparentam ter uma solução óbvia, mas requerem atenção.

Por fim, será entregue aos alunos a atividade 1, de investigação matemática. Os alunos devem preencher a tabela com valores que acreditam serem coerentes para as necessidades da família mencionada e então procurar meios de solucionar a problemática, isto é, conseguir os R$ 50.000.000 após dois anos. Nesse momento, os alunos estarão livres para usar quais estratégias e ferramentas quiserem e as estagiárias não intervirão no desenvolvimento da atividade. Ao fim dos cálculos, cada aluno deve apresentar para a turma sua tabela e suas conclusões.

Verificação da aprendizagem:

A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas tarefas propostas, resolução dos exercícios e anotações das atividades.

Referências:

AZEVEDO, Gustavo Henrique W. de. **Matemática Financeira:** princípios e aplicações.1ª edição. São Paulo: Saraiva, 2015.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática Financeira:** objetiva e aplicada. 11ª edição. São Paulo: Saraiva, 2022.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**, volume 1. São Paulo: Moderna, 1995.

MUNIZ, Carlos Magno Oliveira; RODRIGUES, Chang Kuo; VICTER, Eline das Flores. **Sugestões de Atividades de Educação Financeira para o Ensino**. UNIGRANRIO, Duque de Caxias, 2018. Disponível em:

https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/431413/2/ATIVIDADES_EDUCACAO_FINANCEIRA_CARLOSMAGNOMUNIZ_2018.pdf. Acesso em: 30 nov. 2022.

XISTO, Luiz Paulo. **Guia de Atividades de Educação Financeira e noções de Empreendedorismo na Educação de Jovens e Adultos (EJA)**. Tese (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2020. Disponível em: file:///D:/Downloads/Produto-Educacional-Final-Luiz-Paulo-Xisto-com-licen%C3%A7a.pdf. Acesso em: 30 nov. 2022.

13.2 Material entregue aos alunos

Cartazes de ofertas falsa

Figura 73 – Propagandas

Fonte: Xisto (2020)

Exercício 1 sobre juros

Uma concessionária de automóveis anunciou a venda de um carro zero, oferecendo duas formas de pagamento: R$ 80.000,00 à vista ou entrada de 50% e o saldo em 48 parcelas mensais, com taxa de 2% ao mês sobre o valor financiado no sistema de juros simples.

Para calcular e responder:

a) Qual é o valor de entrada, se esse carro for pago parceladamente?

b) Qual o valor total a ser pago nas 48 parcelas?

c) Após pagar todas as parcelas e a entrada, qual o valor total pago pelo carro?

Exercício 2 sobre juros

Ulisses aplicou R$ 5200,00 durante três anos a uma taxa de juro composto de 7% ao ano. No fim do período qual foi o seu montante obtido?

Lista de impostos

Impostos Federais

➢ Imposto sobre Importação. Se você traz mercadoria de fora do país;

➢ IOF, que incide sobre empréstimos, financiamentos e outras operações financeiras e sobre ações;

➢ IPI, cobrado das indústrias;

➢ IRPF, que incide sobre a renda do cidadão;

➢ Imposto de Renda Pessoa Jurídica (IRPJ). Incide sobre o lucro das empresas;

➢ Imposto sobre a Propriedade Territorial Rural (ITR);

➢ Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (Cide). É cobrado sobre petróleo e gás natural e seus derivados, e sobre álcool combustível;

➢ Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (COFINS). Cobrado das empresas;

➢ Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL). Cobrança feita em cima do valor líquido da renda, antes da declaração do IR.

Impostos Estaduais

➢ ICMS, que incide também sobre o transporte interestadual e intermunicipal e telefonia;

➢ IPVA;

➢ Sobre a Transmissão Causa Mortis e Doação (ITCMD). Incide sobre herança. Caso você receba herança de algum parente.

Impostos Municipais

➢ Imposto sobre a Propriedade Predial e Territorial Urbana (IPTU);

➢ Imposto Sobre Serviços (ISS). Cobrado das empresas;

Quadro 25 – Situação-problema

Situação-problema 1

Num certo dia você foi convocado por uma empresa, na qual deixou currículo para seleção, precisando comparecer para acertar os detalhes do novo emprego. Neste dia são apresentadas duas opções de salário, devendo escolher entre uma das duas imediatamente:

- Um centavo no primeiro dia, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, dobrando o valor a cada dia dali para frente, durante 30 dias.
- Ou R$ 500,00 por dia, totalizando R$ 15.000,00 em um mês de trabalho.

Qual das duas formas de pagamento você escolheria? Justifique.

Fonte: Xisto (2020)

Atividade

Você é o responsável pelo sustento de sua família, na qual é composta por sua esposa e seus dois filhos (um de dois anos e outro de quatro anos). Através de um Processo Seletivo você acaba de ingressar em uma empresa para trabalhar, contrato com validade de dois anos, sem prorrogação. Seu sonho é trabalhar de autônomo, mas no momento você não possui recursos financeiros disponíveis para investir. Quero que você monte o planejamento financeiro a seguir para que esse sonho seja realizado no término do seu contrato, ou seja, você terá que economizar todo mês uma parte do seu salário para que isso seja possível ao final de dois anos.

Alguns dados da situação apresentada:

- Seu salário mensal líquido: R$ 3900,00
- Mínimo estipulado para abrir seu próprio escritório: R$ 50.000,00

a) Você acha possível que este sonho seja realizado?

b) Se você acha possível monte o quadro a seguir, destacando como será criada essa poupança. Se você acha que não é possível realizar esse sonho, justifique e faça o planejamento e mostrando o máximo que você conseguiria economizar.

Quadro 26 – Despesas mensais

Despesas mensais	**(R$)**
Aluguel	
Luz	
Água	
Internet	
Gás	
Supermercado	
Padaria	
Açougue	
Farmácia	
Telefone	
Total:	
Economia mensal:	
Economia ao final de dois anos:	

Fonte: Xisto (2020)

13.3 Resolução dos exercícios

Exercícios sobre juros

Resolução do exercício 1)

a) Se ele der 50% de entrada, ele está dando a metade de R$ 80.000 que é igual a R$ 40 000.

b) $\mathrm{J} = \frac{\mathrm{c.i.t}}{100} \Longrightarrow \mathrm{J} = \frac{40000\,.\,2.48}{100} \Longrightarrow \mathrm{J} = \mathrm{R\$}\ 38400.$

$40000 + 38400 = R\$\ 78400.$

c) $40000 + 78400 = R\$\ 118400.$

Resolução do exercício 2)

Resolução:

$M = C(1+i)^t \Longrightarrow M = 5200(1+0{,}07)^3 = 6270{,}2236.$

Situação-problema

Resolução:

Dia 1	0,01
Dia 2	0,02
Dia 3	0,04
Dia 4	0,08
Dia 5	0,16
Dia 6	0,32
Dia 7	0,64
Dia 8	1,28
Dia 9	2,56
Dia 10	5,12
Dia 11	10,24
Dia 12	20,48
Dia 13	40,96
Dia 14	81,92
Dia 15	163,84
Dia 16	327,68
Dia 17	655,36
Dia 18	1.310,72
Dia 19	2.621,44
Dia 20	5.242,88
Dia 21	10.485,76
Dia 22	20.971,52
Dia 23	41.943,04
Dia 24	83.886,08
Dia 25	167.772,16
Dia 26	335.544,32
Dia 27	671.088,64
Dia 28	1.342.177,28
Dia 29	2.684.354,56
Dia 30	5.368.709,12

Primeira opção: R$ 5.368.709,12

Segunda opção: R$ 15.000,00

Atividade

Resolução: resposta pessoal.

13.4 **Relatório**

Relatório do encontro 9 – 03/12/2022

No dia 03 de dezembro de 2022, às 8:19 da manhã, realizamos o nono encontro do Promat na sala A219.

Inicialmente, entregamos aos alunos alguns cartazes de ofertas encontradas em estabelecimentos comerciais espalhados pelo mundo. Ao serem questionados sobre o que perceberam em cada um dos cartazes, uma das alunas respondeu que eram propagandas enganosas e outra aluna complementou afirmando que eram ofertas que na verdade não eram ofertas.

Durante a análise, os alunos relacionaram um dos cartazes com a *Black Friday* e uma aluna destacou a importância de prestar atenção em anúncios do tipo “leve três e pague dois’’, pois é possível que, na verdade, você esteja pagando pelos três produtos. Para reforçar seu argumento, a mesma aluna afirmou que a compra de livros pela plataforma *Amazon* funciona dessa maneira.

Dando sequência a aula, a estagiária Ana realizou questionamentos aos alunos a fim de promover um momento de discussão acerca de alguns conceitos da educação financeira. Entre eles: pagamento à vista, a prazo (parcelado), aplicações, inflação e juros. Nesse momento, os alunos apontaram o pix, dinheiro e cartão de crédito como formas de pagamento e afirmaram pesquisar e comparar valores antes de efetuar uma compra. Ao serem questionados sobre os motivos que fazem as pessoas se endividarem, uma aluna citou o impulso e outra aluna a falta do dinheiro de imediato. Destacamos, também, a desinformação. Além disso, os alunos comentaram que estão começando a ter contato com a educação financeira recentemente nas escolas, pois foi incluída na grade curricular.

A partir das respostas, direcionamos a discussão para as aplicações. Uma das alunas mencionou que já tinha aprendido que a poupança não é a aplicação mais vantajosa. Outro aluno, justificou, afirmando que existem opções mais vantajosas para aplicar seu dinheiro. Segundo ele, a poupança rende pouco, em torno de 0,3% ao mês. Neste instante uma aluna citou outras possíveis formas de investimento: tesouro direto, CDB, LCI e LCA. E um aluno apontou o investimento em ações.

Posteriormente, definimos e diferenciamos juro simples e juro composto, com a participação da turma. A estagiária Júlia registrou as fórmulas: $M = C + J$, $J = C.i.t$ e $M = C(1 + i)^t$ na lousa e o significado de cada termo. A estagiária Giulia explicou o comportamento do gráfico do montante segundo cada tipo de juro, reforçando os conceitos de função afim e função exponencial. Para aplicar o conteúdo, entregamos dois exercícios sobre juros aos alunos e deixamos um tempo para resolverem. Os alunos tiveram dificuldade para interpretar a letra b da primeira questão. As estagiárias Stephany, Milena e Júlia corrigiram, respectivamente, as questões 1 e 2 no quadro.

Após a resolução, entregamos aos alunos uma lista com os impostos federais, estudais e municipais que são cobrados no Brasil. A estagiária Giulia leu e comentou cada um deles oralmente e perguntou aos alunos quais impostos conheciam. A maioria dos alunos conhecia apenas os impostos mais comuns: IPTU, IPVA e IRPF. No entanto, uma das alunas comentou já ter feito um trabalho na escola e, por isso, conhecia quase todos.

Seguindo com a aula, entregamos aos alunos a situação-problema 1 e pedimos para que escolhessem uma das duas opções de salário indicadas na questão, à princípio, apenas intuitivamente. Um aluno escolheu a opção um rapidamente. O restante da turma escolheu a opção dois, mas comentaram que parecia pegadinha. Instruímos os alunos para que realizassem o cálculo e descobrissem a opção mais vantajosa. A estagiária Stephany escreveu o salário de cada um dos dias da primeira opção na lousa e, assim, concluímos que era a melhor escolha. Para finalizar essa atividade, destacamos que era possível encontrar o salário do trigésimo dia sem calcular todos os outros anteriores, usando a fórmula do juro composto $M = C(1 + i)^t \Longrightarrow \ M = 0{,}01\ (1 + 1)^{29} \Longrightarrow M = R\$\ 5368709{,}20$. E para calcular o salário mensal da primeira opção, utilizamos a fórmula da soma de termos de uma P.G: $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Longrightarrow\ S_n = 0{,}01(2^{30} - 1) \Longrightarrow S_n = R\$\ 10737418{,}23$.

Para a última tarefa, entregamos uma folha sulfite e um problema aos alunos. Cada um deles deveria se colocar no lugar do pai da família indicada, estimar gastos e preencher a tabela da atividade. A partir da coleta e análise de dados, os alunos deveriam concluir se esse pai conseguiria sustentar a família e realizar seu sonho após dois anos. Todos os alunos chegaram à conclusão de que não era possível. Duas alunas reduziram bastante os gastos da família e conseguiram guardar

$R\$ \, 1600{,}00$ e $R\$ \, 1580{,}00$ por mês. Em dois anos, essas alunas guardariam quase $R\$ \, 40000{,}00$, mas ainda não seria o suficiente.

Outro aluno estimou muitos gastos para o sustento da família, de modo que conseguiria guardar apenas $R\$ \, 800{,}00$ por mês. Logo, levaria quase 6 anos para abrir o escritório. Após os cálculos, conduzimos uma última discussão sobre o que poderia ser feito pelo pai para acelerar esse processo, já que não seria possível realizar o sonho no tempo previsto, apenas economizando. À vista disso, reforçamos as aplicações de renda fixa.

Os alunos demonstraram grande interesse e domínio do conteúdo ao longo do encontro. Apesar de ser uma temática nova do ensino básico, a maioria dos alunos já dominava ou pelo menos conhecia alguns conceitos, o que nos surpreendeu. Foi notável a surpresa dos alunos com o valor do salário mensal encontrado na situação-problema 1 e o empenho para desenvolver e determinar uma solução para a última atividade. Isso reforça mais uma vantagem de trabalhar a educação financeira em sala de aula, a motivação dos alunos. O mais interessante de tudo, no entanto, foi percebermos que alguns alunos que pouco falavam em outras aulas, dominaram essa. Expressando suas ideias, tirando dúvidas e interagindo ativamente com as estagiárias e entre si.

14. Encontro 10

14.1 Plano de aula

Plano de aula – décimo encontro – 10/12/2022

Público-alvo: Alunos participantes do Promat.

Conteúdos: Oficinas lúdicas.

Objetivo geral: Retomar conteúdos trabalhados no Promat e explorar a matemática por meio de jogos, dinâmicas e problemas.

Objetivos específicos:

- Desenvolver o raciocínio lógico;
- Calcular expressões algébricas;
- Introduzir jogos relacionados à conteúdos trabalhados anteriormente;
- Estimular o enriquecimento do pensamento matemático;
- Sintetizar o ideal de cada proposta de atividade.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Bola de basquete, Torre de Hanói, Tangram, atividades impressas, feijões, recipiente com água, blocos lógicos, Sudoku, estrela 26, pratinhos de plásticos e *chantilly.*

Encaminhamento metodológico:

Este encontro será o de encerramento Promat e será trabalhado em conjunto com as demais turmas do projeto. Serão desenvolvidas atividades, jogos e brincadeiras em equipe, trabalhando conteúdos vistos durante os nove encontros anteriores.

Inicialmente, os alunos serão divididos em grupos de quatro alunos. Os grupos terão que participar de diferentes dinâmicas durante a manhã, competindo entre si. Será formado uma espécie de circuito pela quadra da Unioeste e os grupos se deslocarão completando as dinâmicas no menor tempo possível. Assim, no fim da manhã, consagraremos a equipe vencedora.

As atividades trabalhadas serão:

Jogo: 'Torre de Hanói'.

A Torre de Hanói é um dos mais famosos jogos de Matemática. Ele consiste em uma base contendo três pilares (hastes), em um dos quais está disposta uma torre formada por alguns discos colocados uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O número de discos pode variar.

Esse jogo tem como objetivo deslocar todos os discos de um pilar para outro qualquer, obedecendo a duas regras:

- Mover apenas um disco por vez.

- Um disco com diâmetro maior nunca pode ficar sobre um disco com diâmetro menor.

Ele também cria uma situação envolvendo o número mínimo de movimentos necessários através da seguinte expressão matemática: $2^n - 1$, em que n corresponde ao número de discos. Por exemplo:

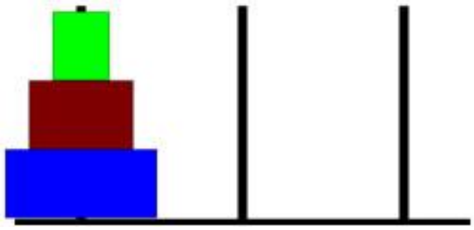
Três discos = $2^3 - 1 = 8\, movimentos$

Quatro discos = $2^4 - 1 = 15\, movimentos$

Cinco discos = $2^5 - 1 = 31\, movimentos$

Mínimos movimentos possíveis com três discos:

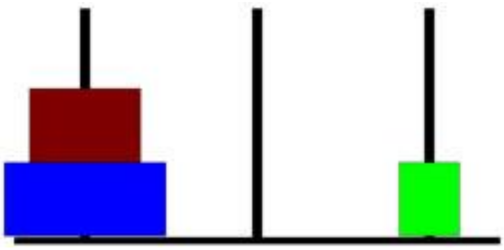
Figura 74 – Início



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

1º movimento

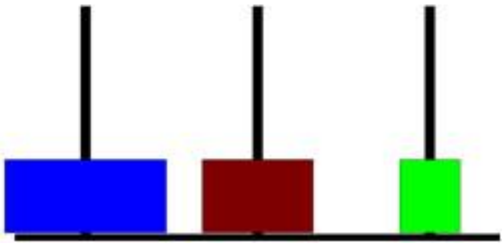
Figura 75 – Movimento 1



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

2º movimento

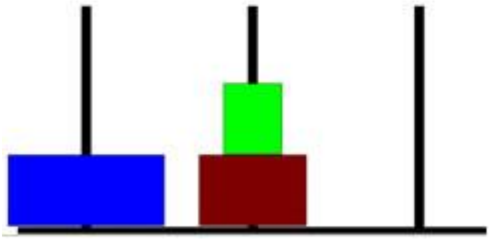
Figura 76 – Movimento 2



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

3º movimento

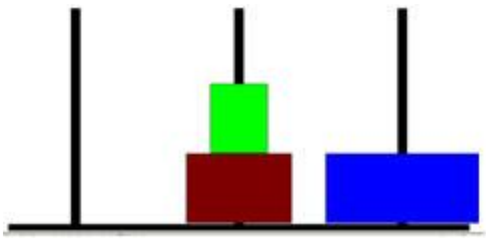
Figura 77 – Movimento 3



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

4º movimento

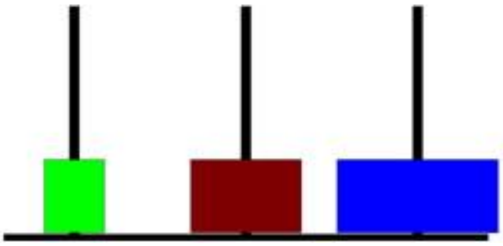
Figura 78 – Movimento 4



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

5º movimento

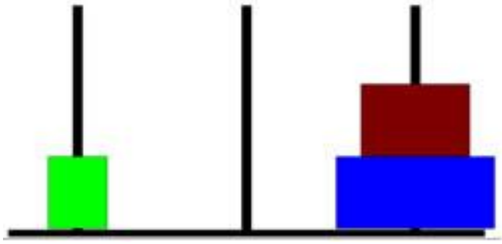
Figura 79 – Movimento 5



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

6º movimento

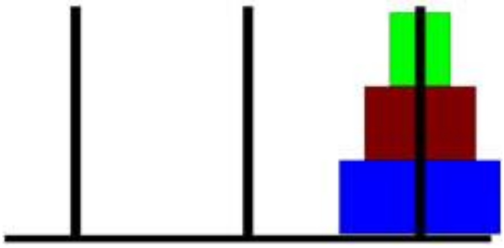
Figura 80 – Movimento 6



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

7º movimento

Figura 81 – Movimento 7



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

Ganhará a equipe que finalizar mais rápido a montagem a cada rodada. Faremos 3º rodadas, sendo a 1º com três disco, a 2º com quatro disco e a 3º com cinco discos. Algumas regras para definir o(s) ganhador(es):

- A equipe que vencer duas rodadas

- Caso nenhuma equipe complete a 3ª rodada com cinco discos, ganhará quem tiver finalizado primeiro a 2ª rodada.

Jogo: ‘Basquete das expressões’.

Teremos duas bolas de basquete no centro da quadra, um membro de cada equipe deve pegar a bola e quicar em direção a cesta e arremessar, assim que o arremesso for convertido, a equipe do jogador que acertou poderá começar resolver uma das expressões. Vence a equipe que terminar de resolver a expressão primeiro, marcando um ponto. Serão feitas quatro rodadas e em caso de empate, faremos uma rodada desempate.

Expressões que serão resolvidas durante os jogos:

$$\mathbf{3x + 9 = 18}$$

$$\mathbf{5x - 4 = x - 20}$$

$$\mathbf{8x - 21 = 3}$$

$$\mathbf{3x - 3 = 3}$$

$$\mathbf{2x + 1 = 9}$$

$$\mathbf{4x + 5 = 7}$$

$$\mathbf{2(x - 4) = 2}$$

$$\mathbf{4x - 3 = 5}$$

$$\mathbf{2x - 18 = 4}$$

$$\mathbf{5x - 24 = 3x}$$

$$\mathbf{x + 3x = x - 15}$$

$$\mathbf{2(x + 5) = 16}$$

$$\mathbf{8x + 6 = 9 + 3x}$$

$$\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 0}$$

$$\mathbf{x^2 - 6x + 9 = 0}$$

$$\mathbf{x^2 - 1 = 0}$$

$$2x^2 = 8$$

$$2x^3 = 16$$

$$4x = 64$$

$$98x = 1960$$

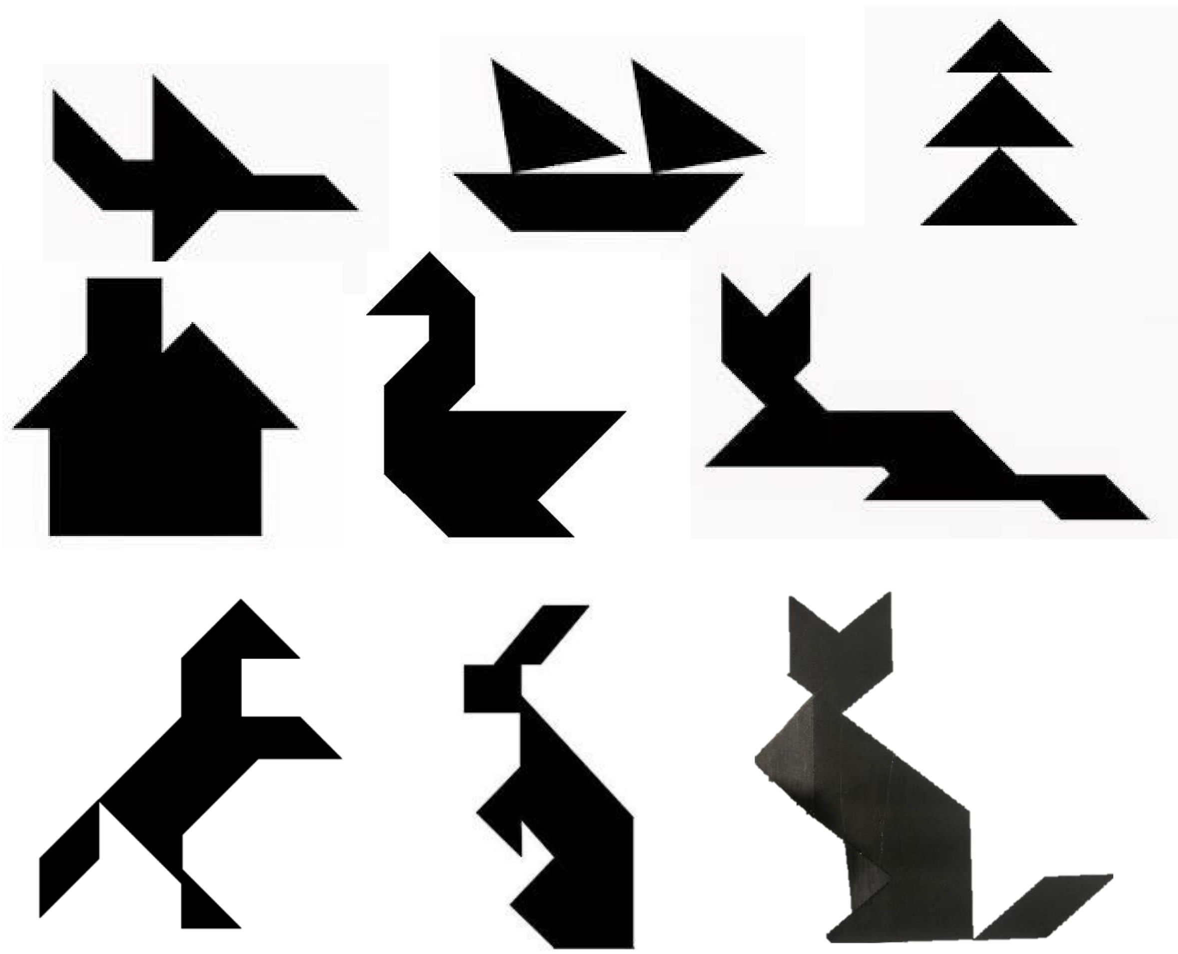
$$10x - 48 = 6x$$

$$15x + 13 = 7x + 45$$

Jogo: ‘Figuras com Tangram’.

Será pedido para que os grupos formem figuras com o Tangram através da exposição de suas sombras. O grupo que conseguir o maior número de acertos com menor tempo será o vencedor.

Figura 82 – Sombras



Fonte: Compilado pelas autoras a partir do Google Imagens

Jogo: ‘Estimando’.

A atividade ocorrerá com seis segmentos, e em todos eles os grupos devem tentar acertar ou aproximar alguma medida. Dentre as estimativas a serem feitas estão:

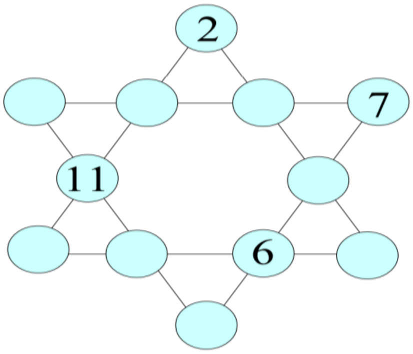
1. O tempo de uma ampulheta;
2. O volume de uma garrafa que será enchida com água;
3. O número de peças do material dourado dentro de uma caixa;
4. Qual é o peso idêntico do dado em relação aos grupos de blocos;
5. A soma de um montante de cédulas;
6. A altura de uma caneta em pé com tampa;
7. O número de clips em uma tampa;
8. A quantidade de peças montáveis em um pote;
9. O número de bolinhas de gude em um pote.

O grupo que obtiver maior precisão nas nove atividades será o vencedor.

Jogo: ‘Estrela 26 e Sudoku’

Os grupos devem completar a estrela de modo que a soma dê 26 em cada linha. No Sudoku é necessário que em cada uma das linhas, das colunas e dos quadrados três por três preenchidos existam um número de um a nove distinto em cada quadrado.

Figura 83 – Estrela 26



Fonte: Jogos no Ensino Médio – Unesp

Quadro 27 – Sudoku

4	9	7	1	3	8	6	5	2
2	6	3	9	5	4	8	7	1
8	5	1	7	2	6	3	9	4
3	1	9	4	6	7	5	2	8
7	2	6	8	1	5	9	4	3
5	8	4	2	9	3	7	1	6
1	3	5	6	7	2	4	8	9
9	7	8	3	4	1	2	6	5
6	4	2	5	8	9	1	3	7

Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

Figura 84 – Estimando

Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

Cada atividade terá o tempo de 20 minutos para ser realizada, e serão distribuídas as seguintes pontuações de acordo com a classificação dos grupos em cada oficina:

1º lugar: cinco pontos

2º lugar: quatro pontos

3° lugar: três pontos

4° lugar: dois pontos

5° lugar: um ponto

No final, o grupo que obtiver a maior pontuação geral será o vencedor da primeira etapa da gincana, e como bônus estará na final da oficina final, enquanto os demais grupos se enfrentarão para conquistarem a outra vaga.

Jogo: 'Torta na cara'

Será solicitado que dois times distintos formem duas filas. Na sequência, serão feitas diversas perguntas relacionadas à matemática para os alunos. O primeiro integrante de cada fila, isto é, de cada time, deve correr para bater antes na mão da estagiária situada alguns metros à frente e ter direito a responder primeiro. Cada resposta correta faz com que um membro da equipe dê uma "tortada" na cara do membro da equipe adversária. Caso o aluno erre ou não saiba a resposta, ele será quem levará a "tortada''. O grupo que conseguir obter maior número de acertos será o vencedor.

O grupo vencedor na final desse jogo será o vencedor da gincana.

Perguntas da torta na cara

1. Quantos segundos há em duas horas? R: 7200
2. Qual é o céu que não tem estrelas? R: O céu da boca
3. Como é chamado um ângulo maior que 90°? R: Obtuso
4. Qual a décima sexta letra do alfabeto? R: P
5. Qual é o nome do macho da ovelha? R: Carneiro
6. Um número negativo elevado ao expoente ímpar resulta em um número? R: Negativo.
7. Um trem elétrico vai do Norte para o sul a 390 km/h. Para que lado vai a fumaça? R: Trem elétrico não tem fumaça.
8. Qual mês do ano tem 28 dias? R: Todos.
9. Dois pais e dois filhos sentaram-se para comer ovos no café da manhã. Cada um comeu um ovo. Quanto ovos eles comeram no total? R:3
10. Em uma igreja havia 4 velas. Entraram 2 ladrões e cada um levou uma vela. Quantas velas ficaram? R: 6 pois eles levaram e não roubaram.
11. Se meu avô tem quatro filhos e cada filho por sua vez também tem quatro filhos, quantos primos eu tenho? R: 12
12. Em um dado a soma dos lados opostos é sempre o mesmo valor. O número da face oposta à face que contém o 1 é? R: 6
13. Ana, Lúcio, Márcia e João estão sentados ao redor de uma mesa circular. Sabe-se que João está de frente para Márcia que, por sua vez, está à esquerda de Lúcio. É correto afirmar que:
    a) João está à esquerda de Lúcio
    b) Ana está de frente para Márcia
    c) João está à direita de Ana
    d) Ana está de frente para Lúcio X
    e) Lúcio está à esquerda de Ana
14. Qual é o nome do filhote da ovelha? R: Carneiro
15. O que é mais pesado, um quilo de algodão ou mil gramas do chumbo? R: Pesam a mesma coisa

16. Uma mãe tem 30 reais para dividir entre duas filhas. Qual o horário? R: 13:45
17.João tem 18 anos. Se ele nascesse oito anos atrás, ele teria quantos anos? 8 anos
18. Quanto é ½ dividido por 3/4? R: 2/3
19. Qual é o resultado de seis quintos elevado ao quadrado? R: 36/25
20. O que é o que é pode ser atirado de um prédio e fica bem, mas morre quando colocado na água? R: o papel
21. A raiz quadrada de 100/49? R: 10/9
22. Quantas crianças cabem em uma circunferência? R: $2\pi r$
23. Quem sou eu se na tabuada apareço em 2,3,4 e 6? R: 12
24. O que o matemático falou para o índio? 8π
25. O que é o que é, quando mais a gente seca fica cada vez mais molhado? A toalha

Verificação da aprendizagem:

Será realizada durante o encontro, avaliando a participação e desenvoltura dos alunos durante as atividades.

Referências:

UNESP. Estrela 26. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/ensino-medio/. Acesso: 09 dez. 2022.

NOÉ, Marcos. **Torre de Hanoi**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/torre-hanoi.htm. Acesso em: 08 dez. 2022.

BARBOSA, Patrícia Coelho. **Jogo: Torre de Hanoi**: Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/. Acesso em 08 de dez. de 2022.

14.2 Material entregue aos alunos

Os materiais usados pelos alunos foram aqueles utilizados durante as gincanas.

14.3 Resolução dos exercícios

<u>Basquete das expressões</u>

Expressões que serão resolvidas durante os jogos:

$$\mathbf{3x + 9 = 18}$$

Resolução proposta:

$$3x = 18 - 9$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

$$\mathbf{5x - 4 = x - 20}$$

Resolução proposta:

$$5x - x = -20 + 4$$

$$4x = -16$$

$$x = \frac{-16}{4}$$

$$x = -4$$

$$\mathbf{8x - 21 = 3}$$

Resolução proposta:

$$8x = 3 + 21$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8}$$

$$x = 3$$

$$\mathbf{3x - 3 = 3}$$

Resolução proposta:

$$3x = 3 + 3$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$$\mathbf{2x + 1 = 9}$$

Resolução proposta:

$$2x = 9 - 1$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

$$\mathbf{4x + 5 = 7}$$

Resolução proposta:

$$4x = 7 - 5$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$\mathbf{2(x - 4) = 2}$$

Resolução proposta:

$$2x - 8 = 2$$

$$2x = 2 + 8$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

$$\boldsymbol{4x - 3 = 5}$$

Resolução proposta:

$$4x = 5 + 3$$

$$4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

$$\boldsymbol{2x - 18 = 4}$$

Resolução proposta:

$$2x = 4 + 18$$

$$2x = 22$$

$$x = \frac{22}{2}$$

$$x = 11$$

$$\boldsymbol{5x - 24 = 3x}$$

Resolução proposta:

$$5x - 3x = 24$$

$$2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2}$$

$$x = 12$$

$$\boldsymbol{x + 3x = x - 15}$$

Resolução proposta:

$$4x - x = -15$$

$$3x = -15$$

$$x = \frac{-15}{3}$$

$$x = -5$$

$$\mathbf{2(x+5) = 16}$$

Resolução proposta:

$$2x + 10 = 16$$

$$2x = 16 - 10$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

$$\mathbf{8x + 6 = 9 + 3x}$$

Resolução proposta:

$$8x - 3x = 9 - 6$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 0}$$

Resolução proposta:

$$(x + 4)^2 = 0$$

$$x = -4$$

$$\mathbf{x^2 - 6x + 9 = 0}$$

Resolução proposta:

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$\boldsymbol{x^2 - 1 = 0}$$

Resolução proposta:

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = 1 \; e \; x = -1$$

$$\boldsymbol{2x^2 = 8}$$

Resolução proposta:

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = 2 \; e \; x = -2$$

$$\boldsymbol{2x^3 = 16}$$

Resolução proposta:

$$x^3 = \frac{16}{2}$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

$$\boldsymbol{4x = 64}$$

Resolução proposta:

$$x = \frac{64}{4}$$

$$x = 16$$

$$\boldsymbol{98x = 1960}$$

Resolução proposta:

$$x = \frac{1960}{98}$$

$$x = 20$$

$$\mathbf{10x - 48 = 6x}$$

Resolução proposta:

$$4x = 48$$

$$x = 12$$

$$\mathbf{15x + 13 = 7x + 45}$$

Resolução proposta:

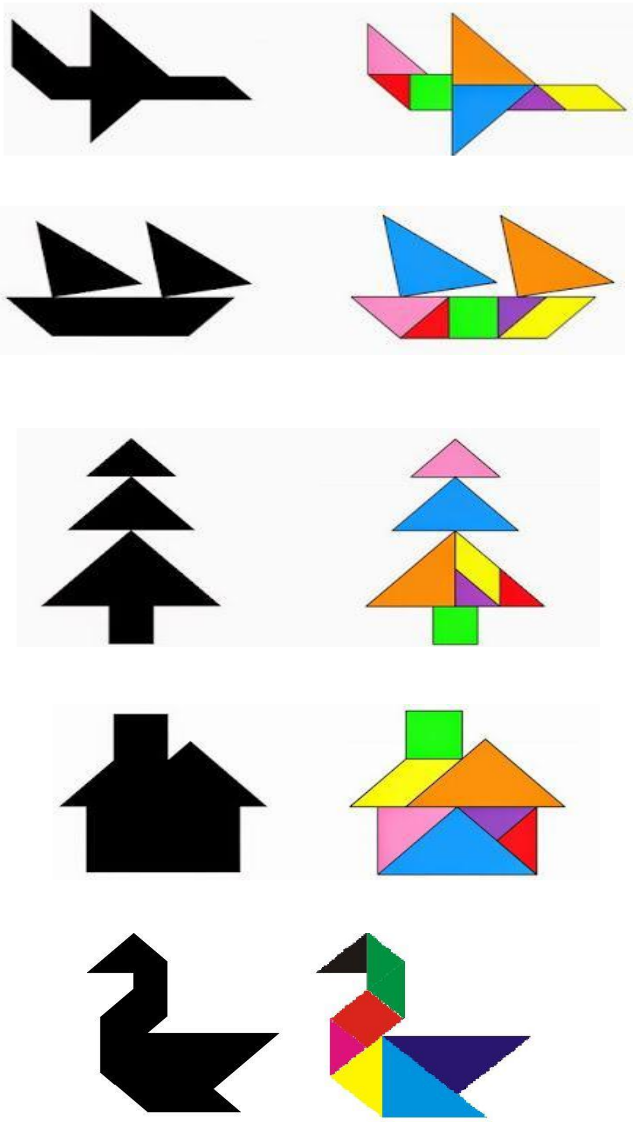
$$8x = 32$$

$$x = 4$$

<u>Figuras com Tangram</u>

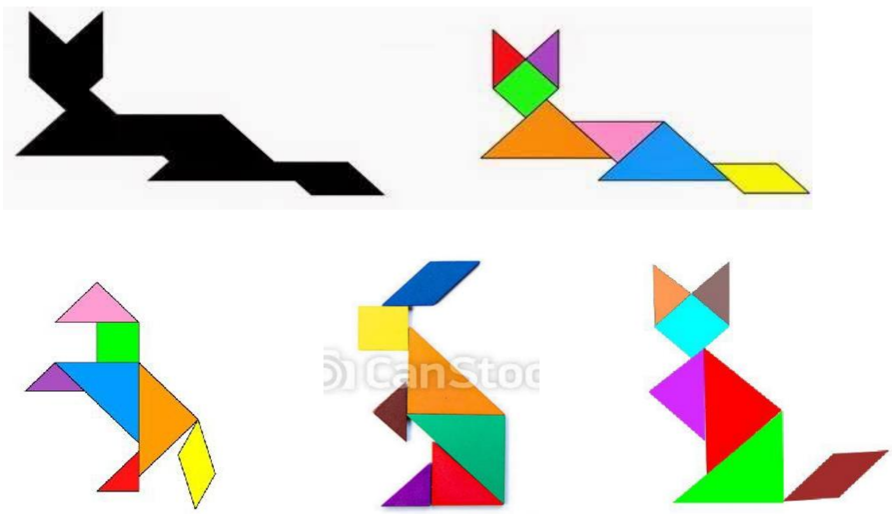
Resolução:

Figura 85 – Resolução do Tangram



Fonte: Compilado pelas autoras a partir do Google Imagens

Figura 86 – Solução das sombras do Tangram

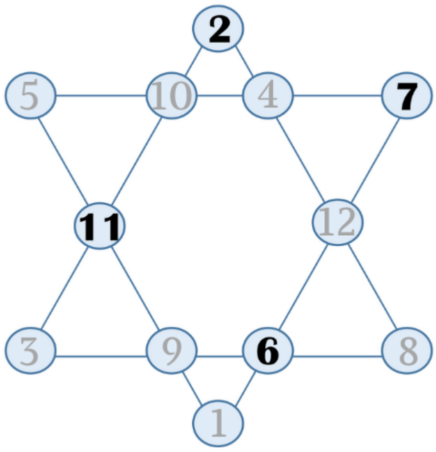


Fonte: Compilado pelas autoras a partir do Google Imagens

Estrela 26

Resolução:

Figura 87 – Resolução estrela 26



Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

Sudoku

Resolução:

Quadro 28 – Resolução Sudoku

4	9	7	1	3	8	6	5	2
2	6	3	9	5	4	8	7	1
8	5	1	7	2	6	3	9	4
3	1	9	4	6	7	5	2	8
7	2	6	8	1	5	9	4	3
5	8	4	2	9	3	7	1	6
1	3	5	6	7	2	4	8	9
9	7	8	3	4	1	2	6	5
6	4	2	5	8	9	1	3	7

Fonte: Elaborado pelos alunos da disciplina de Estágio I (2022)

Torta na cara

1. Quantos segundos há em duas horas? R: 7200

2. Qual é o céu que não tem estrelas? R: O céu da boca

3. Como é chamado um ângulo maior que 90°? R: Obtuso

4. Qual a décima sexta letra do alfabeto? R: P

5. Qual é o nome do macho da ovelha? R: Carneiro

6. Um número negativo elevado ao expoente ímpar resulta em um número? R: Negativo.

7. Um trem elétrico vai do Norte para o sul a 390 km/h. Para que lado vai a fumaça? R: Trem elétrico não tem fumaça.

8. Qual mês do ano tem 28 dias? R: Todos.

9. Dois pais e dois filhos sentaram-se para comer ovos no café da manhã. Cada um comeu um ovo. Quanto ovos eles comeram no total? R:3

10. Em uma igreja havia 4 velas. Entraram 2 ladrões e cada um levou uma vela. Quantas velas ficaram? R: 6 pois eles levaram e não roubaram.

11. Se meu avô tem quatro filhos e cada filho por sua vez também tem quatro filhos, quantos primos eu tenho? R: 12

12. Em um dado a soma dos lados opostos é sempre o mesmo valor. O número da face oposta à face que contém o 1 é? R: 6

13. Ana, Lúcio, Márcia e João estão sentados ao redor de uma mesa circular. Sabe-se que João está de frente para Márcia que, por sua vez, está à esquerda de Lúcio. É correto afirmar que:

a) João está à esquerda de Lúcio
b) Ana está de frente para Márcia
c) João está à direita de Ana
d) Ana está de frente para Lúcio X
e) Lúcio está à esquerda de Ana

14. Qual é o nome do filhote da ovelha? R: Carneiro

15. O que é mais pesado, um quilo de algodão ou mil gramas do chumbo? R: Pesam a mesma coisa

16. Uma mãe tem 30 reais para dividir entre duas filhas. Qual o horário? R: 13:45

17.João tem 18 anos. Se ele nascesse oito anos atrás, ele teria quantos anos? 8 anos

18. Quanto é ½ dividido por 3/4? R: 2/3

19. Qual é o resultado de seis quintos elevado ao quadrado? R: 36/25
20. O que é o que é pode ser atirado de um prédio e fica bem, mas morre quando colocado na água? R: o papel
21. A raiz quadrada de 100/49? R: 10/9
22. Quantas crianças cabem em uma circunferência? R: $2\pi r$
23. Quem sou eu se na tabuada apareço em 2,3,4 e 6? R: 12
24. O que o matemático falou para o índio? 8π
25. O que é o que é, quando mais a gente seca fica cada vez mais molhado? A toalha

14.4 **Relatório**

Relatório do encontro 10 – 10/12/2022

No dia 10 de dezembro de 2022, às 8:15 da manhã, realizamos o décimo encontro do Promat.

O encontro que marcou o encerramento do Promat foi planejado e realizado em conjunto com os três grupos de estagiários. Organizamos diferentes atividades para serem realizadas em um circuito, na quadra de esportes da Unioeste.

Inicialmente, recebemos todos os alunos na quadra e os dividimos em cinco equipes identificadas com as cores azul, vermelho, rosa, marrom e laranja. Foram formados dois grupos de cinco e três grupos de quatro integrantes. Cada uma das equipes foi encaminhada a uma atividade diferente e dispunha de vinte minutos para realizá-la. Ao final do tempo, as equipes trocavam de atividade até que tivessem participado das cinco dinâmicas.

As atividades foram organizadas para que os alunos interagissem entre si e pudessem trabalhar a matemática de uma forma diferente, eram elas: torre de Hanói, figuras com o Tangram, basquete das expressões, estrela 26 e sudoku, estimando e torta na cara.

Nesse momento, foi possível perceber que todos conseguiram trabalhar em conjunto para resolver os desafios e tiveram muito envolvimento nas atividades. Na construção de figuras com o Tangram, por exemplo, alguns alunos tiveram mais facilidade na montagem das figuras que outros, mesmo assim ninguém desanimou e as equipes permaneceram unidas e empenhadas até acabar o tempo. Dessa forma, foi possível ver os alunos unindo suas aptidões e se ajudando a fim de conquistar a melhor pontuação.

Após a realização das cinco atividades planejadas, cada equipe recebeu uma pontuação conforme seu desempenho no circuito. A equipe azul teve a maior pontuação e foi direto para a final. Já as outras equipes, disputaram entre si pela outra posição.

Para a torta na cara, todos os estagiários e alunos se dirigiram até a parte externa da quadra. A equipe marrom derrotou as demais e conquistou a vaga restante para a final. As equipes marrom e azul disputaram a última rodada e, ao fim da brincadeira, a equipe azul foi a vencedora da gincana.

Posteriormente, todos se dirigiram até o Laboratório de Ensino da Matemática (LEM) e participaram de uma confraternização pelo encerramento das aulas do Promat. Nesse momento, servimos um lanche especial e houve uma socialização entre alunos, estagiários e orientadores.

Observando o andamento da gincana, percebemos que os alunos se mostraram muito participativos e dispostos a realizar cada uma das dinâmicas propostas, sobretudo a torta na cara. Todos estavam muito empenhados para responder corretamente as perguntas, pontuar e sujar o adversário. Os alunos também se divertiram muito com as pegadinhas. O mais interessante de tudo, no entanto, foi perceber a união e trabalho em grupo dos alunos. Todos puderam contribuir com a equipe e não deixaram de participar, apesar das dificuldades.

15. **Considerações finais**

Planejar e executar o Promat neste período foi de suma importância para o nosso desenvolvimento no curso. Se tornar um bom professor vai além de dominar a teoria, é preciso saber atuar em sala de aula. Desse modo, apesar das dificuldades encontradas para cumprir com o planejamento, devido à falta de tempo e adaptação ao calendário letivo reduzido, conseguimos atingir o propósito almejado.

O Estágio Supervisionado I nos concedeu, até aqui, grande experiência na prática docente. O apoio dos profissionais que nos orientaram foi essencial para nosso amadurecimento na área educacional. Da mesma forma, lecionar em uma turma com alunos realmente interessados em aprender nos motivou e proporcionou um melhor desempenho nas atividades realizadas.

A partir do projeto, conseguimos observar na prática que, com esforço e colaboração de todo o grupo, os resultados são obtidos com êxito. Portanto, finalizar esta primeira etapa na caminhada docente permitiu que compreendêssemos o valor e necessidade da realização do Promat no curso de licenciatura em Matemática. Trazendo benefícios não apenas aos acadêmicos, mas para toda a comunidade.